L3 Mathématiques
Parcours A, 2020–2021, 28/09/2020

# Correction du contrôle Continu n°1

*Durée : 1h45*
*Documents, téléphones et appareils électroniques interdits*

---

**Exercice 1 (Questions de cours)**

1. Donner la définition de la convergence d'une suite dans un espace topologique. Dans le cas de la topologie triviale puis dans celui de la topologie discrète, décrire les suites convergentes. Si l'espace topologique est séparé, montrer l'unicité de la limite d'une suite si celle-ci existe.

   Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ converge vers une limite $\ell \in X$ si pour tout voisinage (ouvert) $V$ de $\ell$ il existe un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $x_n \in V$.

   Dans le cas de la topologie triviale ( = grossière), le seul ouvert $V$ non vide est $V = X$, donc la suite $(x_n)$ converge vers n'importe quel point $p \in X$.

   Dans le cas de la topologie discrète, on peut prendre pour $V$ le singleton $V = \{\ell\}$. Dire que la suite $(x_n)$ converge vers $\ell$ équivaut donc à dire qu'elle est constante égale à $\ell$ à partir d'un certain rang $N$ (on dit qu'une telle suite est "stationnaire").

   Lorsque la topologie est séparée, il ne peut y avoir deux limites $\ell$, $\ell'$ distinctes, car sinon on pourrait prendre dans $X$ des voisinages disjoints $V$ de $\ell$ et $V'$ de $\ell'$, et $x_n$ devrait appartenir à la fois à la fois à $V$ pour $n \geq N$ assez grand, et à $V'$ pour $n \geq N'$ assez grand, ce qui est une contradiction pour $n \geq \max(N, N')$.

2. Donner un argument montrant que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas équipotents.

   On a une injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 3^{-n-1}$, donc

   $$\operatorname{card}(\mathbb{R}) \geq \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) > \operatorname{card}(\mathbb{N})$$

   d'après les énoncés de Cantor. On peut aussi donner une preuve plus directe : pour voir que $\operatorname{card}(\mathbb{R}) > \operatorname{card}(\mathbb{N})$, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de surjection $f : \mathbb{N} \to [0,1[ \subset \mathbb{R}$. Soit $f : n \mapsto x_n \in [0,1[$ une application quelconque et $x_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{n,i}\, 10^{-i-1}$ l'écriture de $x_n$ en base 10 (disons que l'on prend le développement propre plutôt que le développement impropre si $x_n$ est décimal). Pour tout $i$, choisissons $b_i \in \{1, \ldots, 8\}$ tel que $b_i \neq a_{i,i}$. Alors $y = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i\, 10^{-i-1} \in [0,1[$ est un développement propre qui ne peut coïncider avec aucun de ceux des nombres $x_n$, donc $f$ n'est pas surjective.

**Exercice 2** On considère dans $\mathbb{Z}$ les ensembles $V_{m,k} = m + k\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $V_{m,k}$ et $V_{m',k'}$ sont deux tels ensembles d'intersection non vide, montrer que $V_{m,k} \cap V_{m',k'}$ est encore de la forme $V_{m'',k''}$, et préciser alors la valeur de $k''$.

   Remarquons que $V_{m,k}$ est l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{Z}$ qui sont congrus à $m$ modulo $k$, c'est-à-dire tels que $x - m$ soit multiple de $k$ ; on obtient une condition équivalente pour tout autre représentant $\tilde{m}$ de la classe de congruence modulo $k$. Supposons qu'il existe $a \in V_{m,k} \cap V_{m',k'}$. Alors $x \in V_{m,k} \cap V_{m',k'}$ si et seulement si $x - a$ est à la fois multiple de $k$ et $k'$, ce qui équivaut à dire que $x - a$ est multiple de $k'' = \text{ppcm}(k, k')$. On obtient donc $V_{m,k} \cap V_{m',k'} = V_{a,k''}$.

2. Montrer que la famille $\{V_{m,k}\}_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}$ constitue la base d'une topologie $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{Z}$, pour laquelle les $\{V_{m,k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment une base de voisinages du point $m$.
   On choisit pour ouverts toutes les réunions finies ou infinies $U = \bigcup_{i\in I} V_{m_i,k_i}$ d'ensembles $V_{m,k}$. Alors, pour $U' = \bigcup_{j\in I'} V_{m'_j,k'_j}$ on a bien
   $$U \cap U' = \bigcup_{(i,j)\in I\times I'} V_{m_i,k_k} \cap V_{m'_j,k'_j} = \bigcup_{(i,j)\in S} V_{a_{i,j},\text{ppcm}(k_i,k'_j)}$$
   où la réunion porte sur le sous-ensemble $S \subset I \times I'$ des couples $(i, j)$ tels que $V_{m_i,k_i} \cap V_{m'_j,k'_j} \neq \emptyset$, et où $a_{i,j}$ est un élément quelconque pris dans l'intersection. Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts est stable par intersection finie. Comme $\mathcal{O}$ est de façon évidente stable par réunions arbitraires, on obtient bien ainsi une topologie sur $\mathbb{Z}$. Par définition de $\mathcal{O}$, $V_{m,k}$ est un ouvert contenant $m$, et $(V_{m,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bien une base de voisinages de $m$ puisque tout ouvert non vide $U$ qui contient $m$ contient un ouvert $V_{m',k'}$ de la base contenant $m$, et on a alors $V_{m',k'} = V_{m,k'}$.
3. La topologie $\mathcal{O}$ est-elle séparée ? Est-elle discrète ?
   La topologie $\mathcal{O}$ est séparée. En effet, pour des entiers $m \neq m'$ et $k > |m' - m|$, on voit que $m' - m$ n'est pas multiple de $k$, et les classes de congruence $V_{m,k}$, $V_{m',k}$ forment des voisinages disjoints de $m$ et $m'$. La topologie $\mathcal{O}$ n'est pas discrète car les ensembles $V_{m,k}$ sont infinis, de sorte que tout ouvert non vide est infini ; les parties finies ne sont donc pas ouvertes (en revanche, comme l'espace est séparé, les parties finies sont fermées).
4. En considérant $\bigcup_{m=0}^{k-1} V_{m,k}$, montrer que les ensembles $V_{m,k}$ sont à la fois ouverts et fermés pour $\mathcal{O}$.
   Les ensembles $V_{m,k}$, $0 \leq k \leq m - 1$, sont les différentes classes de congruence modulo $k$. Comme pour toute relation d'équivalence, elles forment une partition de l'ensemble considéré, ici $\mathbb{Z}$. Chaque classe d'équivalence est ouverte, mais aussi fermée comme complémentaire de la réunion des autres classes d'équivalence.
5. Si $P$ est l'ensemble des nombres premiers, vérifier que $\bigcup_{p\in P} V_{0,p} = \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\}$. Si $P$ était un ensemble fini, montrer que $\{-1, 1\}$ serait un ouvert de $\mathbb{Z}$ pour $\mathcal{O}$, et obtenir ainsi une contradiction.
   Tout entier $x \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\}$ admet un facteur premier $p$, par exemple son plus petit diviseur dans l'ensemble $\{2, 3, \ldots, |x|\}$. On a donc $x \in V_{0,p}$. Ceci montre que $\mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\} \subset \bigcup_{p\in P} V_{0,p}$. Mais l'inclusion inverse $\bigcup_{p\in P} V_{0,p} \subset \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\}$ est évidente, puisque tout multiple d'un nombre premier $p$ est nécessairement distinct de $-1$ et 1. Ceci montre que $\mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p\in P} V_{0,p}$. En passant aux complémentaires, on obtient
   $$\{-1, 1\} = \bigcap_{p\in P} \complement V_{0,p}.$$
   Si $P$ était fini, il s'agirait d'après 4. d'une intersection finie d'ouverts, donc $\{-1, 1\}$ serait ouvert, ce qui contredit l'alinea 3.
   Nota : cette démonstration un peu surprenante de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers est due à Furstenberg (1955).

**Exercice 3** On considère sur l'espace $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, identifié à l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n = 0$ ou $1$, la fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}|x_n - y_n|, \qquad \forall x,y \in E.$$

1. Montrer que $d$ est bien définie et que $(E,d)$ est un espace métrique.
   On a ici $x_n - y_n = 0, 1$ ou $-1$, donc la série est absolument convergente, majorée par la série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}$, de sorte que la distance $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$ est bien définie. On a en particulier $d(x,y)| \geq 3^{-n}|x_n - y_n|$, et $d(x,y) = 0$ entraîne $x_n = y_n$ pour tout $n$ : l'axiome de séparation est satisfait. La symétrie est évidente, et pour $x,y,z \in E$, l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ résulte de l'inégalité triangulaire $|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$ dans $\mathbb{R}$. On voit ainsi que $(E,d)$ est un espace métrique.
2. Soit $x,y \in E$, $x \neq y$. Si $p$ est le plus petit indice tel que $x_p \neq y_p$, vérifier que $3^{-p} \leq d(x,y) \leq \frac{3}{2}3^{-p}$.
   Si $x_p \neq y_p$, alors $|x_p - y_p| = 1$, donc $d(x,y) \geq 3^{-p}$. Comme par hypothèse $x_k = y_k$ pour $k < p$, on obtient d'autre part
   $$d(x,y) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} 3^{-k} = \frac{3^{-p}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}3^{-p}.$$
3. Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \{0,1\}^N$ est une suite finie, montrer que les sous-ensembles
   $$U_a = \{x \in E \,/\, x_n = a_n,\ \forall n = 1,2,\ldots,N\}$$
   sont ouverts et constituent une base de la topologie de $E$.
   Soit $w \in E$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$. Alors la boule $B(w, 2\cdot 3^{-N-1})$ coïncide avec $U_a$. En effet, on a bien $U_a \subset B_{\text{fermée}}(w, \frac{3}{2}3^{-N-1}) \subset B(w, 2\cdot 3^{-N-1}$ d'après la question 2., tandis que si $x \notin U_a$, alors $x_n \neq a_n = w_n$ pour au moins un indice $n \leq N$, de sorte que $d(x,p) \geq 3^{-n} \geq 3^{-N} > 2\cdot 3^{-N-1}$. Ceci implique $\complement U_a \subset \complement B(w, 2\cdot 3^{-N-1})$, soit $U_a \supset B(w, 2\cdot 3^{-N-1})$. Or, dans un espace métrique $(E,d)$, il est facile de voir que pour toute suite de réels positifs $\delta_n \to 0$, la famille de boules ouvertes $(B(w,\delta_n))_{w\in E, n\in\mathbb{N}}$ constitue une base de la topologie, c'est-à-dire que tout ouvert $U$ est réunion de telles boules : il suffit de choisir $w \in U$ quelconque et $n$ assez grand pour que $w \in B(w,\delta_n) \subset U$. Par conséquent les $(U_a)$ forment bien ici une base de la topologie de $E$.

**Exercice 4** On dit qu'une application $u : (E,d) \to (F,d')$ entre espaces métriques est höldérienne d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tous points $(x,y) \in E^2$ on ait $d'(u(x),u(y)) \leq C\, d(x,y)^\alpha$.

1. Montrer qu'une application höldérienne est continue.
   Soit $V$ un ouvert de $F$ et $x \in u^{-1}(V)$. On a $u(x) \in V$, et comme $V$ est ouvert, on peut trouver un rayon $\varepsilon > 0$ tel que $B(u(x),\varepsilon) \subset V$. Supposons $y \in B(x,\delta)$, i.e. $d(x,y) < \delta$. L'hypothèse höldérienne implique $d'(u(x),u(y) \leq C(d(x,y)^\alpha < C\delta^\alpha$. Si l'on choisit $\delta = (\varepsilon/C)^{1/\alpha}$ (ou n'importe quelle valeur si $C = 0$), on obtient $d'(u(x),u(y)) < \varepsilon$, d'où $u(y) \in V$ et $y \in u^{-1}(V)$. On en déduit que $B(x,\delta) \subset u^{-1}(V)$, et par suite $u^{-1}(V)$ est ouvert. On voit donc que $u$ est continue relativement aux topologies de $(E,d)$ et $(F,d')$.

2. Montrer que pour $\alpha \in ]0,1[$ l'application $u_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^\alpha$ est höldérienne d'ordre $\alpha$ relativement à la distance usuelle de $\mathbb{R}$, mais que $u_\alpha$ n'est pas lipschitzienne (pour cela, on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto (x+h)^\alpha - x^\alpha$ pour $h \in \mathbb{R}_+$ fixé).

   Posons $v(x) = (x+h)^\alpha - x^\alpha$. Alors $v'(x) = \alpha((x+h)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}) \leq 0$ pour tout $x > 0$. Il en résulte que $v$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (du fait que $v$ est également continue en 0). Ceci montre que $v(x) \leq v(0)$, autrement dit $(x+h)^\alpha - x^\alpha \leq h^\alpha$. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec disons $x \leq y$, prenons $h = y - x = |y - x|$. L'inégalité précédente donne $0 \leq y^\alpha - x^\alpha \leq |y-x|^\alpha$, donc $|y^\alpha - x^\alpha| \leq |y - x|$. En général, on a bien $|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, quitte à échanger $x$ et $y$. Ceci montre que $u_\alpha$ est höldérienne d'ordre $\alpha$ pour la constante $C = 1$. La fonction $u_\alpha$ n'est pas lipschitzienne, sinon sa dérivée serait bornée par la constante de Lipschitz, or $u'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ n'est pas bornée au voisinage de 0 (on peut aussi raisonner avec le taux d'accroissement sur $[0, x]$, qui tend vers l'infini quand $x \to 0_+$).

3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est höldérienne d'ordre $\alpha > 1$ pour la distance usuelle, montrer à l'aide d'une subdivision adéquate de $[a, b]$ que $f$ est nécessairement constante.

   Supposons $f$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1$, avec une constante $C \geq 0$ dans l'hypothèse höldérienne. Prenons $x, y \in [a, b]$, avec disons $x < y$, et une subdivision $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = y$ de pas constant $h = (y - x)/N$. Alors $|f(x_{i+1} - f(x_i)| \leq Ch^\alpha$. En sommant pour $i = 0, 1, \ldots, N-1$ il vient

$$|f(y) - f(x)| = |f(x_N) - f(x_0)| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \leq NCh^\alpha = NC\frac{|y-x|^\alpha}{N^\alpha}.$$

   Si $\alpha > 1$, le membre de droite tend vers 0 quand $N \to +\infty$, donc $|f(y) - f(x)| = 0$ et on voit que $f$ est nécessairement constante.

4. Soit $(E, d)$ l'espace métrique de l'exercice 3) et si on définit $g : E \to \mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n b^{-n}$ avec $b > 1$, alors $g$ est höldérienne d'ordre $\alpha = \ln b / \ln 3$.

   Soient $x, y \in E$ avec $x \neq y$, et soit $p$ le plus petit indice tel que $x_p \neq y_p$. Nous avons $d(x, y) \geq 3^{-p}$, et d'autre part, comme $b = 3^\alpha$ avec $\alpha = \ln b / \ln 3$, il vient

$$|g(x) - g(y)| = \Big| \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - y_n) b^{-n} \Big| \leq \sum_{n=p}^{+\infty} b^{-n} = \frac{b^{-p}}{1 - b^{-1}} = \frac{(3^{-p})^\alpha}{1 - b^{-1}} \leq \frac{d(x,y)^\alpha}{1 - b^{-1}}.$$

   Ceci montre que $g$ est holdérienne d'ordre $\alpha$. Il se peut ici que $\alpha > 1$ (ceci se produit si $b > 3$), bien que $g$ ne soit pas constante.