# Chapitre 1

# Développements limités

## 1.1 Relations de comparaison

**Définition 1.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I = ]a, b[$ et $x_0 \in I$.*

- *On dit que $f$ est* négligeable devant $g$ *au voisinage de $x_0$ et on note $f = o_{x_0}(g)$ si*

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \lim_{x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

- *On dit que $f$ est* dominée par $g$ *au voisinage de $x_0$ et on note $f(x) = O_{x_0}(g(x))$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)| \quad \textit{au voisinage de } x_0.$$

- *Si $g(x_0) \neq 0$, on dit que $f$ est* équivalente à $g$ en $x_0$ *et on note $f \sim_{x_0} g$ si*

$$f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x)).$$

**Exemples 1.1.**
- *Soient $n$ et $p$ deux entiers, si $n > p$ , $x^n = o(x^p)$ au voisinage de 0.*
- *Si $P(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ est un polynôme (ici $a_p \neq 0$), au voisinage de $0$ on a $P(x) \sim a_p x^p$. Autrement dit, au voisinage de $0$ un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.*
- *Au voisnage de $0$ on a $\sin x \sim x$*

## 1.2 Définitions, premières propriétés

Si $f$ est dérivable en un point $x_0$, nous avons vu que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad \lim_{x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui nous permet de comparer $f$ à la fonction polynomiale du premier degré $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ *au voisinage de $x_0$*. L'idée sous-jacente est de comparer des fonctions à des fonctions polynomiales. Autrement dit, un développement limité est une « approximation » en un point d'une fonction par une fonction polynomiale.

**Définition 1.2** (Développement limité)**.** *Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$. et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbf{R}$. On dit que $f$ admet un* développement limité *(DL) à l'ordre $n$ en $a$ ($\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in I$*

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x), \qquad \text{et } \lim_a \varepsilon = 0.$$

*$x \mapsto P(x-a)$ est appelée* partie régulière *du DL, $x \mapsto (x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé* reste *d'ordre $n$. On peut également écrire : $f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$*

L'existence d'un développement limité est une propriété *locale*. L'approximation obtenue est d'autant plus préise que l'ordre du développement est élevé.

**Exemples 1.2.**

— *Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Pour tout $x$, on a $f(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x(x^2)$, avec $x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$. $f$ admet donc un $\mathrm{DL}_2(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1 + 3x - 2x^2$. Mais $f$ admet de même un $\mathrm{DL}_3(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1+3x-2x^2+x^3$, et de reste nul. En fait, il s'agit également d'un $\mathrm{DL}_n(0)$. Plus généralement, on a la propriété suivante :*

**Proposition 1.1.**

$$f \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(a) \text{ de reste nul} \Leftrightarrow f \text{ est un polynôme de degré au plus } n$$

— *Soit $f$ définie par*

$$f : \begin{cases} ]-1,1[ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

*Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$,*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \left(\frac{x}{1-x}\right)$$

*$x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ étant de limite nulle en 0, $f$ admet donc un $\mathrm{DL}_n(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1 + x + \cdots + x^n$.*

*On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young en remarquant que*

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Remarque 1.1.** *$f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ si, et seulement si, $x \mapsto f(x-a)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. On pourra donc faire l'étude des propriétés théoriques des développements limités en 0 .*

**Théorème 1.1** (Unicité du développement limité)**.** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbf{N}$. Il y a unicité de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$.*

*Démonstration.* On peut toujours supposer que $a = 0$. Supposons l'existence de deux polynômes $P$ et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}(x)^n$ et $f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + \mathrm{o}(x)^n$

On en déduit donc que $(P - Q)(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)^n$. Or $\deg(P - Q) \leq n$ donc $P - Q = 0$ comme on le voit sans peine. ☐

**Corollaire 1.1.**

— *Soit $f$ une fonction paire. La partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ est un polynôme pair.*

— *Soit $f$ une fonction impaire. La partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ est un polynôme impair.*

*Démonstration.* On écrit $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}(x^n)$. Par parité de $f$, on obtient $P(-x) + \mathrm{o}(x^n) \underset{x\to 0}{=} f(-x) \underset{x\to 0}{=} f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}(x^n)$. Par unicité du développement limité, on en déduit $P(X) = P(-X)$.

On raisonne de même pour les fonctions impaires. ☐

Si on a un développement limité a un certain ordre $n$, on obtient facilement un développement limité d'ordre $p < n$ en *tronquant* la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ à l'ordre $p$.

**Proposition 1.2.** *Si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors $f$ admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ pour tout $p < n$. Sa partie régulière est celle du $\mathrm{DL}_n(a)$ tronquée à l'ordre $p$.*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut étudier le cas $a = 0$.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + xa_1 + \cdots + x^p a_p + x^{p+1} a_{p+1} + \cdots + x^n a_n + \mathrm{o}(x)^n$$

Or, $x^{p+1} a_{p+1} + \cdots + x^n a_n + \mathrm{o}(x)^n \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)^p$ de sorte que $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + xa_1 + \cdots + x^p a_p + \mathrm{o}(x)^p$ ☐

### 1.2.1 Liens avec la continuité et la dérivabilité

À l'ordre 0, nous avons une caractérisation très simple pour l'existence d'un développement limité :

**Proposition 1.3.** *$f$ admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, $f$ est continue en $a$.*

En effet, la définition se réecrit $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$. En passant à la limite, on a $a_0 = f(a)$. On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$, ce qui est la définition de la continuité en $a$.

**Proposition 1.4.** *$f$ admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si, et seulement si, $f$ est dérivable en $a$.*

La partie régulière du $\mathrm{DL}_1(a)$ est alors $f(a) + (x - a)f'(a)$.

**Remarque 1.2.** *Pour $n \geq 2$, une fonction peut admettre un $\mathrm{DL}_n(a)$ sans pour autant être $n$-fois dérivable en $a$.*

**Théorème 1.2.** *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $a$ dans l'intérieur de $I$. Soit $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbf{R}$, $n$ fois dérivable dans $I$. Alors, $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, de partie réulière $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n)$$

Ce théorème nous permet de donner les développements limités usuels suivants :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{1.1}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + R_n \tag{1.2}$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \tag{1.3}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + R_{2n+1} \tag{1.4}$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) \tag{1.5}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + R_{2n+2} \tag{1.6}$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Elle est de $\mathscr{C}^\infty$ en 0, et on calcule sans peine ses dérivées pour $x$ au voisinage de 0 : $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\ldots$ (les dérivées finissent par s'annuler si $\alpha \in \mathbf{N}$, i.e. si $f$ est un polynôme). On obtient donc

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + R$$

En particulier :

$\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$\alpha = -1/2$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

### 1.2.2 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce qui suit, $n$ désigne un entier naturel.

**Proposition 1.5.** *Soient $f$ et $g$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière $P_n$ et $Q_n$ respectivement et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.*

*Démonstration.* On a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

et

$$g(x) \underset{x\to a}{=} Q(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

On en déduit

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{=} (\lambda P + \mu Q)(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

□

**Remarque 1.3.** *Si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ et $0$ et $g$ un développement limité à l'ordre $p < n$ en $0$, $f + g$ admet un développement limité à l'ordre $p$ en $0$ dont la partie régulière est obtenue en ajoutant à la partie régulière de $g$ la partie régulière de $f$* tronquée *à l'ordre $p$.*

**Proposition 1.6.** *Soient $f$ et $g$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$. Soient $P$ et $Q$ les parties régulières de ces développements. Alors $fg$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière est obtenue comme troncature à l'ordre $n$ de $PQ$.*

**Exemple 1.1.** *Soit à obtenir un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \cos x \sin x$. On écrit*

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

*et*

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

*Le produit des parties régulières donne :*

$$(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})(x - \frac{x^3}{3!}) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{8} - \frac{x^7}{144} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$$

*D'où*

$$\cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$$

*Dans ce cas particulier, on pouvait ausssi remarquer que pour tout $x$ réel $\cos(x)\sin(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$. Le développement (1.5) donne alors directement le résultat.*

**Proposition 1.7** (Composition)**.** *Soient $f$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ et $g$ admettant un $\mathrm{DL}_n(b)$.* On suppose que *$g(b) = a$. Soient $P$ et $Q$ les parties régulières de ces développements limités. Alors $fog$ admet un $\mathrm{DL}_n(b)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant $PoQ$ à l'ordre $n$.*

**Exemple 1.2.** *Soit $f\ :\ x \mapsto f(x) = \exp(x)$ et $g\ :\ x \mapsto g(x) = \sin(x)$. On a bien $g(0) = 0$ De plus :*

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$$

*et* $u = \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3\right)$*. On a donc*

$$u^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)^2 = x^2 + o(x^3)$$

*et* $u^3 = x^3 + o(x^3)$*. On en déduit que*

$$\exp\left(\sin(x)\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

**Proposition 1.8.** *Soit $f$ admettant un* $\mathrm{DL}_n(a)$ *et telle que* $f(a) \neq 0$*. Alors* $\dfrac{1}{f}$ *admet un* $\mathrm{DL}_n(a)$*.*

Comme $f(a) \neq 0$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{x + f(a)}$, $g$ admet un développement limité à tout ordre en 0 et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x) - f(a) + f(a)} = g\mathrm{o}(f - f(a))(x)$$

**Exemple 1.3.** *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{1}{cos(x)}$ *D'après ce qui précède, comme* $cos(0) = 1$*, $f$ admet en 0 un* $\mathrm{DL}_4$*. Dans un voisinage de* 0 *on a* $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) - 1 + 1}$*. Or* $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ *et* $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$*. D'après (1.7), la partie régulière recherchée est la composée de ces parties régulières tronquée à l'ordre* 4*, i.e.*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^4).$$

**Théorème 1.3.** *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$ *une fonction dérivable. Si $f'$ admet un* $\mathrm{DL}_n(a)$*, de partie régulière* $x \to a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$*, alors $f$ admet un* $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ *de partie régulière* $x \to f(a) + a_0 x + a_1\dfrac{x^2}{2} + \ldots a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$*.*

C'est une conséquence de l'innégalité des accroissements finis.

**Remarque 1.4.** *On peut donc intégrer terme à terme un développement limité mais, par contre, si $f$ est dérivable admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$ *rien ne dit (et c'est en général faux) que $f'$ admette un* $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$*. Autrement dit « on ne dérive pas un développement limité »sans prendre de précautions. En fait, on peut dériver des Dls d'ordre* $n+1$ ***uniquement si l'on sait que la dérivée admet un DL d'ordre*** $n$*.*

**Proposition 1.9.** *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$ *dérivable. Si $f$ admet un* $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ *de partie régulière $P$* et si $f'$ *admet un* $\mathrm{DL}_n(a)$ *de partie régulière $Q$, alors* $P' = Q$*.*

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

il résulte alors du théorème précédent que

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n).$$

## 1.3 Applications

### 1.3.1 Calculs de limites ou d'équivalents

**Exemple 1.4.** *Soit à calculer* $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

*Remarquons tout d'abord que la fonction proposée est bien définie pour* $x > 1/\pi$*. Pour tout* $x > 1/\pi$ *:*

$$\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})$$

*Le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$ *donne :*

$$x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$$

*Un simple équivalent à l'ordre 0 ne nous permet pas de calculer la limite de ectte expression quand* $t$ *tend vers 0. En effet,* $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$*, et le log est de limite nulle. Mais,*

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)$$

*et par composition de développements limités,*

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^2}{6} + o(t^3)$$

*D'où*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = -\frac{1}{6}.$$

*On a donc*

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(-\frac{1}{6}\right).$$

## 1.4 Exercices

**Exercice 1** Déterminer le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre $n$ ;
2. $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre $n$ ;
3. $x \mapsto \arccos(x)$, à l'ordre 5 ;

**Exercice 2** En sa rappelant que $\tan' = 1 + \tan^2$, déduire du développement limité de tan à l'ordre 0 celui à l'ordre 1 puis à l'ordre 2.

**Exercice 3** On veut déterminer un développement limité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\pi/3$. Si on pose $x = \pi/3 + h$, alors, dire que $x$ est au voisinage de $\pi/3$ revient à dire que $h$ est au voisinage de 0.

1. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos(h)$ et de $\sin(h)$.
2. Effectuer le développement limité en $h$ de l'expression trouvée à la question précédente.
3. En déduire le développement limité de cos au voisinage de $\pi/3$.

**Exercice 4** Déterminer le développement limité de :

1. $x \mapsto \sin(x)$, à l'ordre 4 en $\pi/2$ ;
2. $x \mapsto \arctan(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
3. $x \mapsto \ln(x)$, à l'ordre 3 en 1 ;
4. $x \mapsto \mathrm{e}^x$, à l'ordre 4 en 1.

**Exercice 5** Donner le développement limité en 0 de :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \tan(x)$, à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$, à l'ordre 4 ;
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$, à l'ordre 3 ;
6. $x \mapsto \sin^6(x)$, à l'ordre 9.

**Exercice 6** Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\cos(x)\ln(1+x)$, à l'ordre 4 ;
2. $\dfrac{1}{\cos x}$, à l'ordre 4.

**Exercice 7** Soit $f$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n$ dans $\mathbf{N}$.

**Exercice 8** Calculer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad 2.\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad 3.\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

## Développements limités usuels *(au voisinage de 0)*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{th } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{argth } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{argsh } x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$