L3 Mathématiques — Université Grenoble Alpes
2018-2019

Exercices de Topologie – Parcours A

Table des matières

1 Réels

1.1 Ordre, sup, inf

Exercice 1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propriétés suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies \exists \ell \in \mathbb{R},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Décrire ces propriétés par une phrase en français la plus simple possible.

Exercice 2 Voici plusieurs propriétés concernant les suites réelles. Lister les implications vraies entre deux propriétés, ou combinaisons de propriétés.

1. croissante
2. strictement croissante
3. majorée
4. minorée
5. périodique à partir d'un certain rang
6. convergente

Donner une suite réelle qui ne possède aucune des propriétés ci-dessus.

Exercice 3 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux propriétés suivantes.

(i) $\forall n \neq m,\ A_n \cap A_m = \emptyset$.

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$

1. Trouver une suite d'intervalles $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $A_n \neq \emptyset$.
2. Est-il possible de trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est un intervalle ouvert $]a_n, b_n[$ non vide.
3. Est-il possible de trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est un intervalle fermé $[a_n, a_n + 1]$ non vide et de longueur 1.

Exercice 4 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.
4. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, en notant $A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$.

Exercice 5 Soient f et g deux applications d'un ensemble E non vide dans $\mathbb{R}$. On note

$$\sup_E f = \sup_{x\in E} f(x) = \sup\{f(x), x \in E\}.$$

1. Montrer que $\sup_E(f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g$.
2. Si g est minorée, montrer que $\sup_E(f + g) \geq \sup_E f + \inf_E g$.

3. Montrer que si pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup\limits_E f \leq \sup\limits_E g$

Exercice 6 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} f(x,y) = \sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B} f(x,y)\big) = \sup_{y\in B}\big(\sup_{x\in A} f(x,y)\big),$$

$$\sup_{x\in A}\big(\inf_{y\in B} f(x,y)\big) \leq \inf_{y\in B}\big(\sup_{x\in A} f(x,y)\big)$$

et que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 7 (Sous groupes de $\mathbb{R}$) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $P = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\omega = \inf P$.

1. Montrer que P est non vide. Qu'en déduit-on pour ω ?
2. On suppose que $\omega > 0$. Montrer que $G = \omega\mathbb{Z} = \{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
3. On suppose $\omega = 0$. Montrer que pour tout $a < b$, il existe $g \in G$ tel que $a < g < b$. (On dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).
4. Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$. Déterminer $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$. Montrer les résultats suivants.
   (a) $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|n + m\alpha| < \varepsilon$. En déduire que $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) Pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tel que $a < \cos n < b$. et $a < \sin n' < b$.

Exercice 8 Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 9 (Exemples)

1. Déterminer le sup et l'inf de $x^{1/x}$ pour x parcourant $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, et $\mathbb{N}^*$.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{Q}} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.
3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}} f' = \sup_{x\neq y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Exercice 10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels vérifiants $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que $f(a) < f(b)$. Pour $y \in]f(a), f(b)[$ on pose,

$$g(y) = \inf\{x \in [a,b] : f(x) \geq y\}$$

Montrer que $g(y) \in]a,b[$ et que $f(g(y)) = y$.

Exercice 11 (Un théorème de point fixe)

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante (pas forcément continue).
On considère $\Omega = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que Ω est non vide et qu'il admet une borne supérieure $\omega \in [0,1]$.
2. Montrer que $f(\omega) \geq \omega$.
3. Montrer que $f(\omega) \leq \omega$. [1]
4. en conclure que f admet un point fixe (i.e. il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$).

Exercice 12

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée sur un intervalle ouvert non vide I. En utilisant la borne supérieure M de l'ensemble $f(I)$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in I$ et $\eta > 0$ tels que
$$|h| < \eta \;\Rightarrow\; f(a+h) - f(a) < \varepsilon.$$
Que peut-on dire si f est minorée sur un intervalle ouvert non vide ?
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété d'additivité
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Montrer que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée alors f est continue sur $\mathbb{R}$. De quelle forme est alors f ?
3. Si on ne suppose rien sur f, l'affirmation de la première question 1 est-elle vraie ?

Remarque : Avec l'axiome du choix on peut construire des fonctions additives discontinues.

1.2 Suites réelles, valeurs d'adhérence

Exercice 13 On considère les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de rationnels définies par
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}\ .$$

1) Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et convergent vers e.
2) En utilisant l'encadrement $a_n < e < b_n$, qui est vérifié pour tout n, déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 14 Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle ne tendant pas vers l. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) tels que, pour tout n, on ait $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| > \varepsilon$.

Exercice 15 Soit (x_n) une suite bornée de réels. Soit m un réel.

1) Montrer que si $x_n \leq m$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup x_n \leq m$.
2) Montrer que si $\limsup x_n > m$, alors $x_n > m$ pour une infinité de n.
3) Montrer que si $\limsup x_n < m$, alors $x_n < m$ à partir d'un certain rang.

1. Indice : on pourra comparer $f(f(\omega))$ et $f(\omega)$.

Exercice 16 Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles bornées.

1) Montrer que si la borne $\sup_n x_n$ n'est pas atteinte, alors $\limsup x_n = \sup x_n$.
2) Démontrer les inégalités suivantes :

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n$$
$$\limsup x_n + \liminf y_n \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

Qu'en déduit-on si la suite (y_n) converge ?

Exercice 17 Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure des suites ci-dessous.

a) $u_n = (-1)^{n^2}$ b) $u_n = \cos(n)$ c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
d) $u_n = n\cos(n)$ e) $u_n = \frac{1}{\sin(n)}$ f) $u_n = \frac{3+n^2+2n}{n(n-\cos n)}$

Exercice 18 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Montrer l'équivalence entre

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de sous-suite bornée.
3. $|x_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 19 Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels à valeurs dans un segment $[a, b]$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est $f(A)$.

Exercice 20 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $y_n = x_{2n}$ et $z_n = x_{2n+1}$. On note respectivement A, B, C l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$. Trouver une relation entre A, B et C. En déduire une expression de $\limsup x_n$ en fonction de $\limsup y_n$ et $\limsup z_n$.

Exercice 21 Donner un exemple de suite réelle :

1) sans valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$).
2) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est F, où F est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ fixée.
3) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{N}$.
4) avec une seule valeur d'adhérence, mais divergente.
5) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 22 Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite de rationnels énumérant $\mathbb{Q}$ (autrement dit, l'application $n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$). Quelles sont les valeurs d'adhérence de $(r_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 23 Montrer que si deux suites réelles bornées (u_n) et (v_n) sont telles que $(u_n - v_n)$ converge vers 0, elles ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 24 Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Déterminer lesquelles des assertions suivantes sont toujours vraies.

1) $u_n \in A$ à partir d'un certain rang.
2) Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3) Tout segment ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.
4) Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \varepsilon$.
5) Si A est borné, alors (u_n) est bornée.
6) Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

7) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors $\liminf v_n = \liminf u_n$

8) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors toute valeur d'adhérence de (v_n) est dans A.

9) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n) et si A est un singleton $\{\ell\}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de (v_n).

10) Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Exercice 25 Soient (u_n) une suite réelle et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, si pour tout k, λ_k est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il en est de même de λ.

Exercice 26 * Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) est un intervalle.

Exercice 27 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}$.

1) Soit $m \geq 1$ fixé. Montrer que $\limsup u_n^{1/n} \leq u_m^{1/m}$. Indication : utiliser la division euclidienne de n par m.

2) Montrer que la suite $(u_n^{1/n})$ converge vers $\inf_{m\geq 1} u_m^{1/m}$.

3) Application : Si A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, montrez que $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{m\geq 1} \|A^m\|^{1/m}$.

Exercice 28 * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence ℓ. Le but de l'exercice est de montrer que (u_n) converge vers ℓ.

1) Montrez que $f(\ell) = \ell$.

2) Montrer qu'il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que $f(]\ell - \delta, \ell + \delta[) \subset]\ell - 1, \ell + 1[$.

3) Montrer qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $u_n \notin [\ell - 1, \ell - \delta] \cup [\ell + \delta, \ell + 1]$.

4) Montrer qu'il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $u_{N_2} \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$.

5) Montrer que pour tout $n \geq N_2$, $u_n \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$, et conclure.

1.3 Équipotence et dénombrabilité

Exercice 29 Soient E et F deux ensembles. Montrer que l'existence d'une injection de E dans F équivaut à l'existence d'une surjection de F dans E. Remarque : la preuve d'une des implications utilise l'axiome du choix.

Exercice 30 Soit X est un ensemble quelconque, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

1. Trouver une application de $X \to \mathcal{P}(X)$.
2. Est-ce que pour tout X, il existe une application injective de X dans $\mathcal{P}(X)$?
3. Montrer qu'il n'existe pas de surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$. (Indication : raisonner pas l'absurde, et considérer le sous-ensemble $E = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.)

Exercice 31 Montrer que l'ensemble $\{0, 1\}^X$ des applications de X dans $\{0, 1\}$ est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 32 *

1. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ et les intervalles $[0, 1]$ et $]0, 1[$ sont équipotents. On admettra le théorème de Cantor-Bernstein.

2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. Indication : utiliser d'abord le fait que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
3. Soit $n \geq 1$ un entier. En déduire que $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. Indication : toute fonction de $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ est déterminée par sa valeur aux points rationnels.

Exercice 33 Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 34 * Montrer que si A n'est pas dénombrable et $B \subset A$ est dénombrable, alors A et $A \setminus B$ sont équipotents. En déduire que les nombres réels et les irrationnels sont en bijection.

Exercice 35 Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée, continue sauf en 0, sans limite à gauche ni à droite en 0.

Exercice 36 Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel x, f possède une limite à gauche et une limite à droite en x, et que ces limites vérifient $f(x-) \leq f(x+)$. Que se passe-t-il si $f(x-) = f(x+)$?
2. Montrer que l'ensemble des points où f est discontinue est (au plus) dénombrable. Indication : montrer que pour tous réels $a < b$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels que $f(x+) - f(x-) \geq \varepsilon$ est fini, de cardinal majoré par $(f(b+) - f(a-))/\varepsilon$.

1.4 Développement en base B, (ir)rationalité

Exercice 37 (Développement en base B) On fixe un entier $B \geq 2$. On note E l'ensemble des suites d'entiers à valeurs dans $\{0, \dots, B-1\}$, indexées par $\mathbb{N}^*$. On note F le sous-ensemble obtenu à partir de E en retirant les suites qui valent $B-1$ à partir d'un certain rang.

Si $a = (a_n)_{n \geq 1}$ et $b = (b_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites de E, on dit que $a < b$ si les suites a et b diffèrent en au moins un indice et si pour l'entier $m = \min\{n \geq 1 : a_n \neq b_n\}$, on a $a_m < b_m$. On dit que $a \leq b$ si $a < b$ ou $a = b$.

1. Montrer que la relation $\leq$ ainsi définie est une relation d'ordre total sur E. Cet ordre s'appelle ordre lexicographique.
2. Soit $a = (a_n)_{n \geq 1} \in E$. Montrer que la série de terme général a_n/B^n converge et que sa somme, notée $S(a)$ est dans $[0,1]$.
3. Montrer que l'application S ainsi définie de E dans $[0,1]$ est croissante, lorsqu'on munit E de l'ordre lexicographique. Est-elle strictement croissante ?
4. Montrer que la restriction de S à F est strictement croissante.
5. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = \lfloor B^n x \rfloor - B \lfloor B^{n-1} x \rfloor$ est dans F et qu'elle vérifie $S(a) = x$. L'écriture
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$$
s'appelle développement en base B du réel x.
6. En déduire que S induit une bijection de F vers $[0,1[$.

Exercice 38 **(Exemples)**

1. Calculer le développement décimal de 13/7.
2. Calculer $0,454545\cdots + 0,565656\cdots$.

Exercice 39 On utilise les notations de l'exercice 37.

1. On suppose que $a = S((a_n)_{n\geq 1}) \in [0,1[$ n'est pas décimal. Montrer qu'alors $x = S((x_n)_{n\geq 1}) \to a$ implique pour tout $n \geq 1$, $x_n \to a_n$.
2. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$. Si $0, a_1 a_2 \cdots$ est le développement décimal d'un nombre $x \in [0,1[$, on note $f(x)$ le réel dont un développement décimal est $0, a_{q_1} a_{q_2} \cdots$.
   (a) Montrer que pour tout a non décimal, f est continue en a. On pourra écrire $f(x) - f(a)$ comme la somme d'une somme finie et une autre infinie.
   (b) Étudier la continuité à gauche et à droite de f en un point décimal.

Exercice 40 Montrer que tout rationnel r de l'intervalle $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique

$$r = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!},$$

où $(a_n)_{n\geq 2}$ est une suite d'entiers vérifiant $0 \leq a_n \leq n-1$ pour tout $n \geq 2$ et $a_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Mettre sous cette forme le rationnel 5/7.

Exercice 41 Soit S l'ensemble des suites croissantes d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}$$

   est convergente et que sa limite appartient à $]0,1]$.
2. Montrer que l'application de S dans $]0,1]$ qui à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ associe $\lim x_n$ est une bijection.
3. Montrer que $\lim x_n$ est rationnel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq k \quad q_n = q_k$$

Exercice 42 **(Irrationalité de π)** On montre l'irrationalité de π^2, donc de π, par contradiction : supposons que $\pi^2 = a/b$ avec a et b entiers strictement positifs, on pose

$$\forall n \geq 1,\ N_n = \pi a^n \int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)dx, \text{ où } P_n(x) = x^n(1-x)^n/n!.$$

1. Montrer que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0.
2. Montrer que pour tout $k \geq n$, $P^{(k)}(0)$ puis $P^{(k)}(1)$ sont entiers.
3. En utilisant des intégrations par parties, montrer que $N_n \in \mathbb{N}$ et conclure.

1.5 Suites de fonctions réelles

Exercice 43 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$;
2. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \inf(n, \ln(x))$;
3. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;
4. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$;
5. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$;
6. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = g(x-n)$ où $g(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ sinon ;
7. $E = [0, 1]$, $f_n(x) = n^2 x$ si $x \leq 1/n$, $f_n(x) = n - n^2(x - 1/n)$ si $1/n \leq x \leq 2/n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Exercice 44 Trouver une suite (f_n) de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 45 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction continue que l'on supposera bornée. A-t-on forcément que $f_n = f(\cdot - \frac{1}{n})$ converge uniformément vers f ? Donner une condition suffisante sur f pour que cela ait lieu.

Exercice 46 Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $E \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur E.
2. Si les fonctions f_n et g_n sont bornées, montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément sur E.
3. Montrer que le résultat de la question précédente devient faux sans l'hypothèse de bornitude.

Exercice 47 * Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue sur $[a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ ayant une limite l, $(f_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. Indication pour le sens difficile : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[a, b]$, montrer qu'on peut choisir ε et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a, b]$ tels que $|f_n(u_n) - f(u_n)| > \varepsilon$ pour une infinité de n. À partir d'une sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in [a, b]$, construire une suite convergente (v_n) telle que $|f_n(v_n) - f(v_n)| > \varepsilon$ pour une infinité de n.

Exercice 48 Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge uniformément sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$, alors (f_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Indication : utiliser le critère de Cauchy uniforme.

Exercice 49 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Montrer que $\int_a^b f_n(t)\, dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\, dt$.

Exercice 50

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose que la suite des dérivées converge uniformément sur $[a, b]$ vers g, et que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour un $x_0 \in [a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $f' = g$.[2]

2. Indice : $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$

2. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, mais sans que la suite des dérivées converge vers f'.

Exercice 51 (Théorème de Dini) Soit (K,d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de K dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f continue. On suppose la convergence croissante, au sens :

$$\forall x \in K, \quad (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

Montrer que la convergence est en fait uniforme. [3]

2 Topologie des espaces métriques

2.1 Distances

Exercice 52 (droite numérique achevée) Avec la convention $\arctan(+\infty) = \pi/2$ et $\arctan(-\infty) = -\pi/2$, on pose $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ pour tout x et y dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

1. Montrer que d définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ et que l'application arctan est une isométrie bijective de $(\overline{\mathbb{R}},d)$ dans $[-\pi/2,\pi/2]$ muni de la distance usuelle.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $x_n\to\ell$ au sens habituel si et seulement si $x_n\to\ell$ dans $(\overline{\mathbb{R}},d)$.
3. Montrer que toute suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une sous-suite convergente dans $(\overline{\mathbb{R}},d)$.

Exercice 53 (Distances sur l'espace des polynômes) Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on définit

$$\begin{aligned} d_0(P,Q) &= \sup_{x\in[0,1/2]} |P(x)-Q(x)|,\\ d_1(P,Q) &= \int_0^1 |P(x)-Q(x)|\mathrm{d}x,\\ d_2(P,Q) &= \begin{cases} \deg(P-Q)+1 & \text{si } P\neq Q,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

1. Montrer que ce sont des distances sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.
2. Quel est le comportement de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces distances ?

Exercice 54 Soit E un ensemble fini. Lorsque A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B$ leur différence symétrique, définie par $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, et on pose $d(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$. Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de E.

Exercice 55 (distance géodésique sur S_{d-1}) Soit $d\in\mathbb{N}^*$. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$, $||\cdot||$ la norme euclidienne associée, et S_{d-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que pour x et y dans S_{d-1}, on a $-1\leq(x|y)\leq 1$. On pose alors $s(x,y) = \arccos(x|y)\in[0,\pi]$

3. Indice : pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra considérer la suite de fermés $F_n = \{x\in K \mid (f-f_n)(x)\geq\varepsilon\}$

2. Soient x, y et z dans S_{d-1}. On note $\alpha = s(x,y)$, $\beta = s(y,z)$ et $\gamma = s(x,z)$. On pose $x' = x - (y|x)y$ et $z' = z - (y|z)y$. Interpréter géométriquement les vecteurs x' et z'. Montrer que $(x|z) = (x|y)(y|z) + (x'|z')$ et exprimer $(x'|z')$, $||x'||$, $||z'||$ en fonction de α, β, γ. En déduire que $\gamma \leq \alpha + \beta$.
3. Montrer que s est une distance sur S_{d-1}.
4. Pour x et y dans S_{d-1}, exprimer $\|x-y\|$ en fonction de $s(x,y)$.
5. Montrer que pour tout x et y dans S_{d-1},
$$\|x-y\| \leq s(x,y) \leq \frac{\pi}{2}\|x-y\|.$$
Montrer que les constantes 1 et $\pi/2$ de cette inégalité sont optimales.

Exercice 56 Soit (E,d) un espace métrique. Soit φ une application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, telle que :

$$\begin{array}{ll} (a) & \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ (b) & \varphi \text{ est croissante}, \\ (c) & \forall u, v \geq 0,\ \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v) \quad \text{(on dit que } \varphi \text{ est sous-additive).} \end{array}$$

1. Vérifier que l'application $\varphi(d) := \varphi \circ d$ est une distance sur E.
2. Montrer que toute fonction concave non nulle $\varphi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $\varphi(0) = 0$ vérifie les conditions (a), (b) et (c). En déduire que $d/(1+d)$, $\min(1,d)$, $\ln(1+d)$, et d^α pour $0 < \alpha < 1$ sont des distances sur E.
3. On suppose que φ est continue en 0. Lorsque d est une distance sur E, on note pour $x \in E$ et $r > 0$, $B_d(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.
— Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_{\varphi(d)}(x, \varphi(r)) \subset B_d(x,r)$.
— Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x,r') \subset B_{\varphi(d)}(x,r)$.
— En déduire que les distances d et $\varphi(d)$ définissent les mêmes ouverts.
4. Lorsque φ n'est pas continue en 0, montrer que les boules pour la distance $\varphi(d)$ sont des singletons dès que le rayon est suffisamment petit.

Exercice 57 (Espace de suites) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout f et g dans E, on note
$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(|g(k) - f(k)|, 1)$$

1. Montrer que cette formule définit une distance sur E, et que pour cette distance, E est borné.
2. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que :
— si pour tout $k \in [0,K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$, alors $d(f,g) \leq 3 \times 2^{-K}$,
— si $d(f,g) \leq 2^{-2K}$, alors pour tout $k \in [0,K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$.
3. Montrer que $d(f,f_n) \to 0$ si et seulement si (f_n) converge ponctuellement vers f.
4. Montrer que dans (E,d), toute suite de Cauchy converge. On dit que l'espace métrique (E,d) est complet.
5. Soit T l'application de E dans E définie par $T(f)(n) = f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T est lipschitzienne pour la distance d.

Exercice 58 (Plus courte distance entre deux parties d'un espace métrique) Soit (E, d) un espace métrique.

1. La formule $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b)\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$ définit-elle une distance sur l'ensemble des parties non vides de E ?
2. Montrer que pour toutes parties A, B, C de E,
$$\mathrm{dist}(A, C) \leq \mathrm{dist}(A, B) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(B, C).$$
3. Trouver un exemple de F fermée, telle que $d(x, F)$ n'est pas atteinte.

Exercice 59 (Distance SNCF) On munit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$, on définit $D(x, y) = \|x - y\|$ si x et y sont colinéaires et $D(x, y) = \|x\| + \|y\|$ sinon.

1. Montrer que $D(x, y) \geq \|x - y\|$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que D est une distance.
2. Décrire géométriquement la boule $B_D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : D(x, y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$ quelconques fixés.

Exercice 60 (Distance ultramétrique) Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$

1. Montrer que d est une distance et que si $d(x, z) \neq d(z, y)$, (iii) est une égalité : dans E tous les triangles sont isocèles.
2. Montrer que si $r > 0$ et $x \in E$, pour tout $y \in B(x, r)$, $B(y, r) = B(x, r)$.
3. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est de Cauchy si et seulement si la suite $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.
4. Soit p un nombre premier. Pour tout entier non nul, on définit $\nu_p(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose
$$d_p(x, y) = \begin{cases} p^{-\nu_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$
a) Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, déterminer les éléments de la boule fermée $\overline{B}(x, p^{-n})$ et de la boule ouverte $B(x, p^{-n})$.
c) Montrer que la suite de terme général $u_n = 6^n$ converge vers 0 dans $(\mathbb{Z}, d_2)$ mais diverge dans $(\mathbb{Z}, d_5)$.

2.2 Normes

Exercice 61 Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}$.

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer les meilleures constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ telles $c_1\|.\|_2 \leq N \leq c_2\|.\|_2$.

Exercice 62 Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme sur E.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme $||\cdot||_\infty$ sur E.

Exercice 63 (Inégalité Hölder) . Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Pour tout $x, y > 0$, montrer que $x^{1/p}y^{1/q} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$.
2. Pour tous $a = (a_i)_{i\in\{0,\cdots n\}} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $b = (b_i)_{i\in\{0,\cdots n\}} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, montrer que
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_1^n a_i^p)^{1/p} (\sum_1^n b_i^p)^{1/p}.$$
On pourra utiliser $\alpha = a/|a|_p$ et $\beta = b/|b|_q$.

Exercice 64 Soit E un espace vectoriel réel, et d une distance sur E. Montrer que d provient d'une norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) (invariance par translation) pour tous $x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$;

(ii) (action des dilatations) pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Exercice 65 Les distances des exercices 53, 57 et 59 sont-elles associées à une norme ?

Exercice 66 (Maximum de valeurs absolues de formes linéaires) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit Φ un ensemble fini de formes linéaires sur E, qui engendre $E^* = L(E,\mathbb{R})$. Pour tout $x \in E$, on note
$$N(x) = \max\{|\varphi(x)| \ ; \ \varphi \in \Phi\}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$ habituelles sur $\mathbb{R}^d$ sont de la forme ci-dessus.
3. On prend $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire canonique et $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, où φ_1 et φ_2 sont définies par
$$\varphi_1(x_1,x_2) = x_1 + (1/2)x_2 \text{ et } \varphi_2(x_1,x_2) = (1/2)x_1 - x_2.$$
Dessiner la boule unité associée à la norme N.
4. Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et S la sphère unité. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$||x|| = \sup\{|(s|x)| \ ; s \in S\}.$$

Exercice 67 (Inégalité de Hanner pour les exposants entiers pairs) .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 2n$. Soit I un intervalle. Le but de l'exercice est de démontrer dans ce cas particulier l'inégalité de Hanner : pour tout f et g dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$,
$$||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p \leq \big(||f||_p + ||g||_p\big)^p + \big|||f||_p - ||g||_p\big|^p.$$

1. Montrer l'inégalité lorsque f et g sont à valeurs réelles. Indication : utiliser la formule du binôme.

2. Montrer l'inégalité entre fonctions

$$|f+g|^p + |f-g|^p \leq (|f|+|g|)^p + \big||f|-|g|\big|^p$$

et en déduire l'inégalité de Hanner dans le cas général. Indication : on pourra exprimer les deux membres de l'inégalité à l'aide des fonctions $u = |f|^2 + |g|^2$, $v = 2\mathrm{Re}(\overline{f}g)$ et $w = 2|fg|$.

Remarque : en fait, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout réel $p \geq 2$, et l'inégalité inverse est vraie pour $p \in [1,2]$.

2.3 Produits scalaires

Exercice 68 (L'identité du parallélogramme caractérise les espaces euclidiens) Soit (E,N) un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ N^2(x+y) + N^2(x-y) = 2N^2(x) + 2N^2(y).$$

Le but de l'exercice est de montrer que N provient d'un produit scalaire. Pour cela, on pose

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = \frac{1}{4}[N^2(x+y) - N^2(x-y)].$$

1. Montrer que pour tout x et y dans E, $b(x,y) = b(y,x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $b(x,x) = 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.
3. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $b(x+y,z) + b(x-y,z) = 2b(x,z)$.
4. Montrer que pour tout $(x,z) \in E^2$, $b(2x,z) = 2b(x,z)$.
5. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z)$.
6. Soit $(x,z) \in E^2$. Montrer l'égalité $b(\lambda x, z) = \lambda b(x,z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Conclure.

Exercice 69 (Distance à une partie dans un espace vectoriel normé) Soit (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie, S la sphère unité , C une partie convexe de E, F un fermé de E et $x \in E$.

1. Montrer que la distance $d(x,S)$ est atteinte en au moins un point de S, exprimer cette distance en fonction de $N(x)$ et montrer qu'il n'y a pas toujours unicité.
2. Montrer que si la norme N provient d'un produit scalaire, la distance $d(x,C)$ est atteinte en au plus un point.
3. Montrer que si $x \notin F$, alors $d(x,F) > 0$.

2.4 Convergence, intérieur, adhérence, frontière, densité

Exercice 70 Déterminer les valeurs d'adhérence des suites (u_n) suivantes, dans $E = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, où α est un réel fixé :

a) $u_n = (n, (-1)^n)$ b) $u_n = ((-1)^n, (-1)^{n+1})$

c) $u_n = (1/n, \cos(n\alpha))$ d) $u_n = (\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$

Exercice 71 Soit (E,d) un espace métrique. Soient A et B deux parties de E. Comparer les paires d'ensembles suivants. Lorsqu'il n'y a pas égalité, donner un contre-exemple.

1. $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.
4. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
5. $\partial(A \cup B)$ et $\partial A \cup \partial B$.
6. $\partial(A \cap B)$ et $\partial A \cup \partial B$.

Exercice 72 Soit (E,d) un espace métrique. Soit A une partie de E. Exprimer plus simplement les parties

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \quad \text{et} \quad \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}\,.$$

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les parties A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ soient toutes différentes.

Exercice 73 Soit A une partie d'un espace métrique.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $\partial(A)$ est d'intérieur vide ; ce résultat reste-il vrai avec A fermé ? Avec A quelconque ?
2. Montrer que : A ouvert $\Longleftrightarrow A \cap \partial(A) = \emptyset$.
3. Montrer que : A fermé $\Longleftrightarrow \partial(A) \subset A$.
4. Montrer que : A ouvert et fermé $\Longleftrightarrow \partial(A) = \emptyset$.
5. Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et $\partial(\mathring{A}) \subset \partial A$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

Exercice 74 On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme usuelle. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \{(x,y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1\} \cup \{(0,0)\}.$$

1. Est-ce une partie ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A.
2. On munit A de la distance induite. Indiquer si les parties suivantes sont ouvertes fermées dans A et dans $\mathbb{R}^2$:

$$B =]0,+\infty[\times\{0\} \qquad C = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0, xy < 1\}$$
$$D = \{(x,y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1/2\}$$

Exercice 75 Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

$$A =]-\infty,1[\cup]1,2] \cup \{3\} \qquad B = \mathbb{Z} \qquad C = \mathbb{Q}$$
$$D = \left\{(-1)^k + 2^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad E = \{p^{-1} + q^{-1} : (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

Même question dans $\mathbb{R}^2$ avec $A =]-\infty,-1] \times \{0\} \cup [-1,1[\times[-1,1[$.

Exercice 76 On munit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On fixe $D \subset [0,1]$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes.

$A = \{f \in X \mid \forall x \in D, f(x) = 0\}$
$B = \{f \in X \mid \exists x \in [0,1/2], f(x) > 1\}$
$C = \{f \in X \mid \forall x \in [0,1], f(x) \leq 0\}$
$D = \{f \in X \mid \exists\,! \, x \in [0,1], f(x) = 0\}$
$E = \{f \in X \mid f \text{ est dérivable en } x = \frac{1}{2}\}$

Exercice 77 Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme.

1. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n}x$ si $x \in [0,1/2]$, et $f_n(x) = \frac{n-2}{n}(x-1)+1$ si $x \in [1/2,1]$. Dessiner le graphe de f_n et montrer que (f_n) converge dans X vers $f \in X$ à déterminer.
2. Montrer que $D = \{f \in X \mid f \text{ est dérivable en } 1/2\}$ est d'intérieur vide dans X.

Exercice 78 Soit (E,d) un espace métrique. On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \{x_k : k \geq n\}$. On note enfin A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\overline{X_0} = X_0 \cup A$. En déduire que A contient l'adhérence de $\overline{X_0} \setminus X_0$.
2. Lorsque $(E,d) = (\mathbb{R}, \text{us})$ et $x_n = \cos n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, utiliser ce résultat pour retrouver A à partir du fait que X_0 est dense dans $[0,1]$.

Exercice 79 On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est-il dense dans $[0,1]$?
2. Soit $C = [0,1] \times [0,1]$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap C$ est-il dense dans C ?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap D$ est-il dense dans D ?

Exercice 80 Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et G le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions continues, affines par morceaux sur $[0,1]$, c'est-à -dire des applications f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une subdivision $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ avec $1 \leq k \leq n$ soit affine.

1. À toute application $f \in E$, on associe le module de continuité de f, donné par
$$\forall \delta > 0,\ M_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,;(x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x-y| \leq \delta\}.$$
Que peut-on dire de $M_f(\delta)$ quand $\delta \to 0$?
2. Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'application qui à $x \in [0,1]$ associe la valeur moyenne de f sur le segment $[a_n(x), b_n(x)] = [(1-n^{-1})x, (1-n^{-1})x + n^{-1}]$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément. Indication : remarquer que le segment $[a_n(x), b_n(x)]$ contient x et est de longueur $1/n$. En déduire que F est dense dans E muni de la norme $||\cdot||_\infty$.
3. Montrer que G est dense dans E muni de la norme $||\cdot||_\infty$.

Exercice 81 (Espace métrique produit) Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et (E,d) l'espace métrique produit.

1. Soit $(z_n) = (x_n, y_n)$ une suite de E. Soient A_z, A_x, A_y l'ensemble des valeurs d'adhérence de (z_n), (x_n), (y_n). Démontrer une inclusion relative aux ensembles A_z, A_x, A_y et montrer qu'il n'y a pas toujours égalité.
2. Soient $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$, non vides. À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle ouverte dans (E,d) ? À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle fermée dans (E,d) ? À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle dense dans (E,d) ?
3. On note p_1 et p_2 les projections canoniques de $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2. L'image par p_1 d'une partie ouverte dans (E,d) est-elle ouverte dans (E_1, d_1) ? Mêmes questions avec une partie fermée de (E,d) et avec une partie dense de (E,d).

Exercice 82 On munit l'espace vectoriel $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ des matrices $d \times d$ à coefficients complexes de la norme définie par $||A|| = \sup_{ij} |a_{ij}|$ si $A = (a_{ij})$.

1. Montrer que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \subset \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ des matrices inversibles forme une partie dense de $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$.[4] En déduire que pour tout $A, B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, on a $\chi(AB) = \chi(BA)$, où χ est le polynôme caractéristique.
2. Donner l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes de $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$.
   (a) Les matrices inversibles $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$
   (b) Les matrices unitaires $\{A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) | {}^t\overline{A}.A = Id\}$
   (c) Les projecteurs $\{A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) | A^2 = A\}$

Exercice 83 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E. On pose $A+B = \{a+b | (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que $A + B$ n'est pas forcément fermé, même si A et B le sont.[5]

Remarque : $A + B$ est fermé si A et B sont fermés et l'un est en outre compact.

2.5 Continuité, homéomorphismes, équivalence de distances

Exercice 84 Soient (E, d) et (E', d') deux espaces étriques, et $f : E \to E'$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue ;
(ii) Pour tout $A \subset E'$, $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A)}}$;
(iii) Pour tout $A \subset E'$, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

Donner un exemple d'application continue f pour laquelle $\overline{f^{-1}(A)} \neq f^{-1}(\overline{A})$.

Exercice 85 Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$ et $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de A.

1. Montrer que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \partial A$.
2. A quelle condition χ_A est continue sur E ?
3. En déduire l'équivalence entre
   (i) $\emptyset$ et E sont les seules parties ouvertes et fermées de E.
   (ii) Toute application continue $E \to \{0, 1\}$ est constante.

Exercice 86 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et $f : X \to Y$.

1. Montrer que f est continue en x si et seulement si $f(x) \in \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$ tel que $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que f continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$.

Exercice 87 Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Soit A une partie de E. Montrer les applications

$$f \text{ continue sur } A \implies f_{|A} \text{ continue } \implies f \text{ continue sur } \overset{\circ}{A}.$$

Trouver un contre-exemple aux réciproques.

4. Indice : $\lambda \mapsto \det(A + \lambda Id)$ est un polynôme de degré d
5. Indice : On peut regarder le graphe de l'exponentielle et la droite réelle dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 88 Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Soit A_1 et A_2 deux parties non vides de E séparées par des ouverts, i.e. telles qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 de E, disjoints, tels que $A_i \subset O_i$, $i = 1, 2$.

1. Démontrer que si $f|_{A_1}$ et $f|_{A_2}$ sont continues, alors $f|_{A_1 \cup A_2}$ est continue.
2. Donner un exemple de parties non séparées par des ouverts où cette implication est fausse.

Exercice 89 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : X \to Y$. On dit que f est *ouverte* si pout tout ouvert $O \subset X$, $f(O)$ est ouvert dans Y. On dit que f est *fermée* si pout tout fermé $F \subset X$, $f(F)$ est fermé dans Y.

1. On suppose f ouverte. Soit $A \subset X$ un ouvert. Montrer que la restriction $f_{|A}$ est ouverte. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse que A est ouvert ?
2. On suppose f fermée. Soit $A \subset X$ un fermé. Montrer que la restriction $f_{|A}$ est fermée. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse que A est fermé ?
3. On suppose f ouverte et fermée. Montrer que pour tout $B \subset Y$, l'application $x \mapsto f(x)$ de $f^{-1}(B)$ dans B est ouverte et fermée.

Exercice 90 (Inversion et projection stéréographique) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclien. On note $|| \cdot ||$ la norme euclidienne associée. Soit u un vecteur unitaire de E. On note H l'hyperplan affine d'équation $\langle u, x \rangle = 1$ et S la sphère de diamètre $[0, u]$. Pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, on note $\mathrm{inv}(x) = ||x||^{-2} x$.

1. Que vaut $|| \mathrm{inv}(x) ||$?
2. Montrer que inv est une involution de $E \setminus \{0\}$.
3. Montrer que $\mathrm{inv}(H) = S \setminus \{0\}$.
4. Montrer que pour tout x et y dans H, $|| \mathrm{inv}(x) - \mathrm{inv}(y) || = ||x||^{-1} ||y||^{-1} ||x - y||$. En déduire que inv est continue sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice 91 Soit $f : (\mathbb{R}^d, || \cdot ||_\infty) \to (\mathbb{R}^d, || \cdot ||_\infty)$ une application bijective et continue. On suppose que

$$\lim_{||x||_\infty \to \infty} ||f(x)||_\infty = +\infty,$$

montrer que f est un homéomophisme.[6]

Exercice 92 Quelles propriétés sont transportées par un homéomorphisme $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$?

(i) (u_n) est une suite convergente de (X, d_X).
(ii) (u_n) est une suite bornée de (X, d_X).
(iii) (u_n) est une suite de Cauchy de (X, d_X).
(iv) $A \subset X$ est une partie dense de (X, d_X)

Mêmes questions avec une application bi-lipschitzienne.

Exercice 93 Soit (X, d) un espace métrique, et $f : X \to X$ une bijection. On définit une distance $f^* d$ sur X (*tiré en arrière de d par f*) en posant

$$f^* d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

1. Montrer que d et $f^* d$ sont topologiquement équivalentes ssi f est un homéomorphisme.
2. Montrer que d et $f^* d$ sont régulièrement équivalentes ssi f est bi-lipschitzienne.

6. Indice : utiliser la caractérisations à l'aide des suites pour montrer la continuité de f^{-1}.

2.6 Applications linéaires continues

Exercice 94 Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $a \in [0,1]$ et $Z_a = \{f \in E : f(a) = 0\}$. L'ensemble Z_a est-il dense dans E pour la norme $||\cdot||_\infty$? Pour la norme $||\cdot||_2$?

Exercice 95 Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Pour $s \in [a,b]$ fixé, on définit $\delta_s : E \mapsto \mathbb{R}$, par $\delta_s(f) = f(s)$. L'application δ_s est une forme linéaire sur E, appelée *mesure de Dirac au point* s ou *fonctionnelle évaluation en* s.

1) Etudier la continuité de δ_s, lorsque E est muni de $||\cdot||_\infty$ ou $||\cdot||_1$.

2) Même question pour $s \mapsto \delta_s$, lorsque E^* est muni de la norme triple associée.

Exercice 96 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)$ bornées, et F le sous espace vectoriel des suites u telles que $\sum |u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $||u||_\infty = \sup_n |u_n|$, et pour $u \in F$, on pose $||u||_1 = \sum |u_n|$. On fixe $a \in E$, et on considère l'application $f : E \to E$ qui envoie u sur $au = (a_n u_n)_n$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que f est une application linéaire continue, et calculer sa norme.

3) Montrer que $f(F) \subset F$, et calculer la norme de la restriction $f_{|F}$ quand on prend la norme $||\ ||_1$ sur F.

Exercice 97 Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour tout f, $g \in E$, on note fg la fonction produit de f et g. On dit qu'une forme linéaire φ est multiplicative si $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tout f et g de E. Pour $x_0 \in [0,1]$, on définit l'application $\delta_{x_0} : E \to \mathbb{R}$ par $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$.

1) Montrer que δ_{x_0} est une forme linéaire continue multiplicative.

2) Déterminer $|||\delta_{x_0}|||$.

Soit φ une forme linéaire non identiquement nulle, continue et multiplicative. On cherche à montrer que φ est de la forme δ_{x_0} avec $x_0 \in [0,1]$.

3) Montrer que si $f \in E$ est positive, alors $\varphi(f) \geq 0$.

4) Soit $\mathbf{1}$ l'application constante égale à 1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(\mathbf{1}) = 1$

5) À l'aide des questions précédentes, montrer que φ est continue sur $(E, ||\cdot||_\infty)$.

6) Soient $h : x \mapsto x$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 = \varphi(h)$. Montrer que $x_0 \in [0,1]$.

7) Soit $f \in E$. On suppose que f est dérivable au point x_0. Montrer qu'on peut trouver $g \in E$ telle que $f = f(x_0)\mathbf{1} + (h - x_0\mathbf{1})g$. Que vaut $\varphi(f)$?

8) Montrer que $\varphi = \delta_{x_0}$. On pourra utiliser la densité de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ dans $(E, ||\cdot||_\infty)$.

Exercice 98 Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions lisses de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et D l'endomorphisme de dérivation.

1) Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu. On pourra considérer les applications $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$.

2) Soit F le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ soit continu.

Exercice 99 Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On fixe $g \in E$, et on considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$.

1) Montrer que φ est une forme linéaire continue.

2) Déterminer la norme $|||\varphi|||$ lorsque g est une fonction positive, puis lorsque g est la fonction $x \mapsto x - 1/2$.

3) (*) Que vaut $|||\varphi|||$ pour une fonction $g \in E$ quelconque ?

4) On note e_n la fonction monôme $e_n(x) = x^n$ restreinte à $[0,1]$, et on suppose que $\varphi(e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$.

En déduire que $g = 0$.

2.7 Compacité

Exercice 100 Soit (E,d) un espace métrique et A une partie compacte de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x,A)$ est atteinte.
2. Soit B un fermé tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $d(A,B) > 0$ où $d(A,B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b)$. Donner un contre-exemple lorsque A est seulement supposé fermé.
   Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (on pourra considérer $\{x \in E | d(x,A) < \varepsilon\}$). Ceci reste-t-il vrai pour A fermé quelconque ?
3. Soit B un compact, montrer qu'il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $d(A,B) = d(a,b)$.

Exercice 101 Soit A une partie fermée et non bornée de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance usuelle. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $(x \in A)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{x | x \in A \text{ et } f(x) \leq k\}$ est compact.
2. Montrer que $f_{|A}$ est minorée et qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf f(A) = f(a)$.
3. Utiliser ce résultat pour montrer que les questions 1) et 3) de l'exercice 100 restent vraies si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit fermée et B compacte.

Exercice 102 Les espaces suivants sont-ils compacts ? On prendra la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et la topologie induite sur les parties de $\mathbb{R}^n$ (en particulier idem pour les parties de $M_n(\mathbb{R})$, via l'identification standard $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$). Pour les espaces de fonctions, on prendra la topologie de la convergence uniforme.

1. le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
2. la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$.
3. l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y \geq 0\}$.
4. l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y > 0\}$.
5. l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)); x \in]0,1]\} \cup \{(0,x);\ x \in [-1,1]\}$.
6. $GL_n(\mathbb{R})$.
7. le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n.
8. l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont les valeurs propres sont dans $[-1,1]$.

9. à $k \in]0,1[$ fixé, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $[-1,1]$.
10. l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $[-1,1]$.

Exercice 103 Soit (E,d) un espace métrique, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 104 Soit X et Y des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et $G \subset X \times Y$ le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

1. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de X convergente telle que $(f(x_n))$ soit convergente dans Y, on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.
2. Montrer que si f est continue G est fermé dans $X \times Y$.
3. Montrer que si Y est compact et G est fermé dans $X \times Y$, alors f est continue.

Exercice 105 (Ensemble triadique de Cantor) Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\frac{2x+A}{3}$ l'image de A par l'homothétie de centre x et de rapport $\frac{1}{3}$. L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0,1]$ est défini par récurrence de la façon suivante :

$$K_0 = [0,1], \quad K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \frac{2+K_n}{3} \quad \text{et} K = \cap_{n\geq 0} K_n.$$

Ainsi, on découpe $[0,1]$ en trois intervalles égaux et on retire celui du milieu en gardant les bornes. Donc $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On réitère le procédé précédent sur chaque segment, chaque segment est coupé en 3 parties égales et la partie centrale est retirée en gardant les bornes.

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

1. Soit $n \geq 1$, montrer que K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de la forme $[x_n, x_n + \frac{1}{3^n}]$ où les x_n décrivent l'ensemble $\{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}; a_i \in \{0,2\}\}$.
2. Montrer que K est compact non vide, d'intérieur vide.
3. Montrer que tout élément x de K s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2. Réciproquement, montrer que si $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2, alors $x \in K$.
4. Montrer que K est sans point isolé, c'est à dire que pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap K \setminus \{x\} \neq \emptyset$. (On dit que K est parfait).
5. Montrer que les composantes connexes de K sont les singletons (on dit que K est complètement discontinu).
6. Montrer que K n'est pas dénombrable.
7. L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie suivante : Si $x = (x_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, une base de voisinages ouverts de x est donnée par $V_k(x) = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ / pour tout $i \leq k,\ y_i = x_i\}$ où k parcourt $\mathbb{N}$. Montrer que cet espace topologique est homéomorphe à K.

Exercice 106 (Théorème de d'Alembert-Gauss) Soit $P(z)$ un polynôme non constant (à coefficients réels ou complexes). Montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. *Indication :* montrer que $|P|$ atteint son minimum en un point z_0, puis que $P(z_0) = 0$.

3 Topologie générale

3.1 Exemples d'espaces topologiques

Exercice 107 (droite à deux origines) Soit $A = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite. On considère $X = A/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par, pour $(x,\varepsilon), (x',\varepsilon') \in A$:

$$(x,\varepsilon) \sim (x,\varepsilon') \Longleftrightarrow x \neq 0,\ x = x' \text{ et } \varepsilon \neq \varepsilon'.$$

Soit $p\colon A \to X$ la projection canonique et on munit X de la topologie quotient : $U \subset X$ est ouvert si est seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de A. On note aussi $o_- = p\left((0,-1)\right)$ et $o_+ = p\left((0,1)\right)$.

1) Montrer que pour tout couple $(u,v) \in X^2$, il existe un ouvert contenant u mais pas v (on dit que X est accessible).

2) Est-ce que X est séparé ?

3) Montrer qu'il n'y a pas unicité de la limite dans X.

3.2 Topologies, continuité

Exercice 108 Quelles conditions doivent vérifier A et B pour que $\mathcal{O} = \{\emptyset, A, B, E\}$ soit une topologie sur E ?

Exercice 109 Soit $\mathcal{O} = \{\emptyset, A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } A^c \text{ est dénombrable}\}$.

1) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.

3) Montrer que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.

Exercice 110 Soit X un ensemble, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie sur X si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(ii) $\forall (B,B') \in \mathcal{B}^2, \forall x \in B \cap B', \exists B'' \in \mathcal{B}, x \in B'' \subset B \cap B'$.

Exercice 111 Montrer que tout espace métrique séparable (c'est-à -dire admettant une partie dénombrable dense) possède une base dénombrable d'ouverts.

Exercice 112 On considère la famille $\mathcal{B}$ des intervalles semi-ouverts de la forme $[a,b[$, $a < b$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que les ouverts usuels de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathcal{O}$. Le singleton $\{x\}$ est-il un ouvert ? est-il un voisinage de $\{x\}$? est-il fermé ?

3) Les suites $(1/n)_{n\geq 1}$ et $(-1/n)_{n\geq 1}$ sont-elles convergentes dans $(\mathbb{R},\mathcal{O})$?

4) L'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ est-il séparé ?

5) L'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ est-il séparable ?

6) Montrer que $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ n'a pas de base dénombrable. En déduire qu'il n'est pas métrisable.

Exercice 113 Soit X un espace topologique séparé.

1) Montrer que les ensembles finis sont fermés.

2) Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in X^2 : x = y\}$ (diagonale de X^2) est fermé.

3) Montrer plus généralement que le graphe de toute application continue f de X dans X est fermé.

Exercice 114 Soit X un espace topologique. On suppose que pour tous $x \neq y$ dans X, il existe une application continue f de X dans un espace topologique séparé telle que $f(x) \neq f(y)$. Montrer que X est séparé.

Exercice 115 (Topologie de la convergence simple : non métrisable) Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in [0, 1]^N$, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$, on définit

$$V_{f,x,\varepsilon} = \{g \in E \mid \forall i \in \{1, \cdots, N\}, |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon_i\}$$

On définit $\mathcal{O}$ comme l'ensemble des réunions d'ensembles précédents.

1) Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur E.

2) Montrer qu'une suite de fonctions de E est convergente pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement.

3) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de E nulles sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans E.

4) En utilisant une fonction de E non nulle sur un ensemble non dénombrable, montrer que la topologie précédente n'est pas métrisable.

Exercice 116 Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer que E est séparable, c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense.

3.3 Connexité

Exercice 117 On considère le sous-ensemble $X = \Big\{(x, y) \mid y = 0\Big\} \cup \Big\{(x, y) \mid x > 0, y = \frac{1}{x}\Big\}$ de $\mathbb{R}^2$. X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 118 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit, les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$D_n = \Big\{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\},\ E_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \times \{n\} \text{ et } F_n = \cup_{k \leq n}(D_k \cup E_k).$$

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est connexe.

2) On note $C = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ et $A = C \cup D$ où D est l'axe des ordonnées.

a) Montrer que A est connexe (on pourra établir que $C \subset A \subset \overline{C}$).

b) Démontrer que A n'est pas connexe par arcs. (On pourra supposer l'existence de $f : [0, 1] \to A$ continue telle que $f(0) = (0, 0)$ et $f(1) = (1, 1)$, et considérer $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ où $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$)).

Exercice 119 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont-ils connexes ? Quelles sont leurs composantes connexes ?

Exercice 120 On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$X = \Big[\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\{x\}\times\mathbb{R}^+)\Big] \cup \Big[\bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\{x\}\times]-\infty,0[)\Big]$$

X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 121 1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ et $M_0 = (x_0,y_0) \in D$. Démontrer que $D \setminus \{M_0\}$ est connexe.

2) En déduire que D n'est homéomorphe à aucun segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Exercice 122 1) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, muni de l'une des distances usuelles. Montrer que :

a) $\mathbb{R}^n \setminus H$ a deux composantes connexes C_1 et C_2, qui sont convexes.

b) Si $a \in H$, alors $C_1 \cup \{a\} \cup C_2$ est connexe par arcs.

c) Si A est un sous-ensemble strict de H, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ est connexe.

2) On note $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\},\ n \geq 2$.

a) Montrer que S^{n-1} est connexe par arcs.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ a deux composantes connexes.

c) Si $* \in S^{n-1}$, $S^{n-1} \setminus \{*\}$ est-elle connexe ?

Exercice 123 Soit $T = (\{0\}\times[-1,1]) \cup ([-1,1]\times\{0\})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que T est connexe

2) Soit $f : T \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(T)$ est un segment.

3) Soit $x \in T$. Montrer que $T \setminus \{x\}$ est connexe si et seulement si x est l'un des quatre points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Montrer que $T \setminus \{(0,0)\}$ a quatre composantes connexes et que, dans les autres cas, $T \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes.

4) Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 124 Soit (E,d) un espace métrique connexe non borné. Montrer que toute sphère (i.e. tout ensemble de la forme $\{x \in E \mid d(x_0,x) = r\}$ où $x_0 \in E$ et $r > 0$) est non vide.

Exercice 125 (Passage des douanes) Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset E$ une partie connexe. Soit $B \subset E$ une partie de E telle que A intersecte B et son complémentaire. Montrer que A intersecte la frontière de B.

Exercice 126 Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et A, B deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

1) Démontrer que tout ouvert O de E contenant B rencontre A.

2) Montrer que $A \cup B$ est connexe en utilisant la définition de la connexité (on supposera l'existence de deux ouverts O_1 et O_2 tels que les ensembles $O_1' = (A\cup B)\cap O_1$ et $O_2' = (A\cup B)\cap O_2$ forment une partition de $A \cup B$).

3) Obtenir ce même résultat en considérant les $f : A \cup B \to \{0,1\}$ continues.

4) Montrer que la conclusion est fausse si on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Exercice 127 Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et $F \subset E$ un fermé. On suppose que E et ∂F sont connexes. Montrer que F est connexe. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose pas F fermé ?

Exercice 128 Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques connexes, et $A \subset X$, $B \subset Y$ deux sous-ensembles stricts. Montrer que $(A \times B)^c$ est connexe dans $X \times Y$. Qu'en est-il de $A^c \times B^c$?

Exercice 129 1) Soit A une partie d'un espace topologique (E, τ). On suppose que pour tout x, y dans A, il existe une partie connexe $A_{x,y}$ de A contenant x et y. Montrer que A est connexe.

2) Soient A et B dans $GL(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une partie connexe H de $GL(n, \mathbb{C})$ qui contient A et B. (Indication : Construire H à l'aide de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \det(\gamma(z)) \neq 0\}$, où $\gamma : z \mapsto zA + (1-z)B$ pour $z \in \mathbb{C}$).

3) En déduire que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe.

4) $GL(n, \mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 130 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie ouverte et fermée de E. Montrer que A est réunion de composantes connexes de E.

Exercice 131 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{P}$ une partition de E en parties ouvertes et connexes. Montrer que $\mathcal{P}$ est la partition de E en composantes connexes.

Exercice 132 Montrer qu'une application localement constante définie sur un espace connexe est constante.

Exercice 133 Soit U une partie ouverte connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose que toutes les dérivées partielles de f sont nulles. Montrer que pour tout $x \in U$, il existe un voisinage de x sur lequel f est constante. En déduire que f est constante.

Exercice 134 Soit $f : S^n \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

4 Complétude

Exercice 135 Soit (E,d) un espace métrique.

1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy de E. Montrer que la suite $(d(a_n,b_n))$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

2) Soit (a_n) une suite de E telle que $\sum d(a_n,a_{n+1})<\infty$. Montrer que (a_n) est de Cauchy.

Exercice 136 Soit $E=\mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par $||\sum a_kX^k||=\max(|a_k|,\ k\in\mathbb{N})$. On note $P_n=1+X+\cdots+\dfrac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice 137 Soit δ la distance sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x,y)=|\arctan(x)-\arctan(y)|$. Montrer que $(\mathbb{R},\delta)$ n'est pas complet.

Exercice 138 Soit (f_n) une suite de $(C([0,1],\mathbb{R}),||\ ||_\infty)$ telle que $||f_{n+1}-f_n||_\infty<\varepsilon_n$, où $\sum_n\varepsilon_n<\infty$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction $f\in C([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 139 Soit $p\in[1,\infty[$. Montrer que $l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})=\{x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\mid\sum_n|x_n|^p<\infty\}$ est un espace vectoriel complet pour la norme $||x||_p=(\sum_n|x_n|^p)^{1/p}$. (Indication : utiliser l'inclusion $l^p\subset l^\infty$).

Exercice 140 Soit X l'espace des suites réelles et soit

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\quad\text{pour } x,y\in X\ .$$

1. Montrer que X est complet pour la métrique ρ.
2. Soit Y l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Y est dense dans X. Y est-il complet ?
3. Y muni de la norme uniforme est-il complet ? On considère Y comme un sous-ensemble de l'ensemble des suites bornées muni de la norme uniforme. Quel est alors son adhérence ? Celle-ci définit-elle un espace complet ?

Exercice 141 Montrer que $(\mathbb{R}^2,d_2)$ n'est pas réunion de cercles disjoints non réduits à un point. (*Indication :* considérer les disques fermés associés à une telle famille de cercles, et mettre en évidence une suite de disques emboités dont les rayons tendent vers 0.)

Exercice 142 (Continuité uniforme) 1) Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont uniformément continues sur leur intervalle de définition : i) exp . ii) ln . iii) $\sqrt{.}$ iv) $x\mapsto\frac{1}{x}$. v) $x\mapsto x^2$. vi) $x\mapsto\sin(x^2)$. vii) $x\mapsto x\sin(\ln(x))$.

2) Montrer qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (indication : utiliser le théorème de Heine).

Exercice 143 (Construction d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dérivable nulle part) * Soit $\varphi(x)=|x|$ pour $-1\le x\le 1$. On prolonge φ par périodicité sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x+2)=\varphi(x)$. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx).$$

En utilisant la convergence normale, montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en x.

Exercice 144 À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *Indication :* on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.

Exercice 145 (Une application du théorème de Baire : le théorème de la limite simple) Soit f une limite **simple** d'applications continues $f_n : (E, d) \to (F, \delta)$, où (E, d) est un espace métrique **complet**.

(i) Pour des entiers p, q, n, on note $E_{p,q,n} = \{x \in E \mid \delta(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/n\}$, et $E_{p,n} = \bigcap_{q \geq p} E_{p,q,n}$. Montrer $E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_{p,n}$.

(ii) Pour tout n, on pose $O_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{E}_{p,n}$. Montrer que O_n est un ouvert dense dans E.

(iii) On pose $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Montrer que f est continue en x, pour tout x dans G.

(iv) En déduire que f est continue sur une partie dense de E.

(v) Application : soit f une fontion réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$. (Considérer $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$).

Exercice 146 Trouver

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \, dx.$$

Exercice 147 (Théorème de Picard) Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ ayant une itérée f^p contractante. Montrer que

(i) f possède un point fixe et un seul a.

(ii) Pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 148 Soit $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)).$$

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ ||_\infty$ et $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où

$$g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) \, dt.$$

Montrer que T^2 est contractante. Utiliser l'exercice 147 et conclure.

Exercice 149 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ ||_\infty$. On définit pour toute f de E, $T(f)$ par

$$\forall t \in [0, 1],\ T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x u f(u) du \right) dx.$$

Montrer que T est bien définie, puis qu'elle est contractante. En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$, la fonction nulle.

Exercice 150 (Complété d'un espace métrique) Soit (E, d) un espace métrique.

(i) On dit que deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

(ii) On note E^* l'ensemble des classes d'équivalence. On pose, si $A \in E^*$ est représenté par (a_n) et $B \in E^*$ par (b_n), (cf Ex 135)
$$\Delta(A, B) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$
Montrer que Δ définit une distance sur E^*.

(iii) Montrer que (E^*, Δ) est complet. *Indication :* utiliser un procédé diagonal.

(iv) Pour $a \in E$, on note A_a l'élément de E^* représenté par $(a_n) = (a)$. Montrer que $\varphi(a) = A_a$ définit une isométrie de (E, d) dans (E^*, Δ).

(v) Montrer que $\varphi(E)$ est dense dans E^*. On identifie E à $\varphi(E)$ et on appelle E^* le *complété* de E.

Exercice 151 (Entiers p-adiques) Soit p un nombre premier. On munit $\mathbb{Z}$ de la distance p-adique (cf. feuille 3) :
$$d_p(x, y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$
où pour tout entier strictement positif n, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers, et on pose $v_p(-n) = v_p(n)$. On note
$$|x|_p = d_p(x, 0) = p^{-v_p(x)},\ x \neq 0, \quad |0|_p = 0, \tag{1}$$
la *valeur absolue p-adique.*

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $(\mathbb{Z}, d_p)$, et $\mathcal{N} = \{(x_n) \in \mathcal{C} |\ \lim_{n\to\infty}|x_n|_p = 0\}$. L'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ induit une structure d'anneau sur $\mathcal{C}$. *L'anneau des entiers p-adiques* est le quotient
$$\mathbb{Z}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}.$$

1. Montrer que l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$ qui à x associe la classe de la suite constante (x) est une injection. Dans la suite, on identifie $\mathbb{Z}$ avec son image par cette application.
2. Montrer que pour tout $(x_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|x_n|_p \geq c$.
3. On rappelle que si $d_p(x, y) \neq d_p(y, z)$, alors $d_p(x, z) = \max(d_p(x, y), d_p(y, z))$ ("tous les triangles sont isocèles"). Déduire de la question 2 que pour tout $(x_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ la suite réelle $(|x_n|_p) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n|_p = |x_m|_p$ si m, $n \geq N$.
4. Soit λ, $\mu \in \mathbb{Z}_p$, et $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$ de classes λ, μ, respectivement. On pose
$$d_p(\lambda, \mu) = \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, y_n). \tag{2}$$
Montrer que cette limite existe, qu'elle ne dépend pas du choix des suites (x_n) et (y_n) représentant λ et μ, et que si λ et μ sont les classes de suites constantes (x) et (y), alors $d_p((x), (y)) = d_p(x, y)$.
5. Montrer que d_p définit une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}_p$.
6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{Z}_p, d_p)$.
7. En déduire que :
   (a) $(\mathbb{Z}_p, d_p)$ est complet (*indication : étant donné une suite de Cauchy (λ^n) de $(\mathbb{Z}_p, d_p)$, on pourra utiliser le résultat de la question 6 et un procédé diagonal pour construire une suite de Cauchy λ de $(\mathbb{Z}, d_p)$ telle que $\lambda = \lim_{n\to\infty}\lambda^n$*) ;
   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ et $n \geq 1$, il existe un unique $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x \leq p^n - 1$, tel que $d_p(x, \lambda) \leq p^{-n}$.
8. En utilisant les résultats des questions 7a et 7b, montrer que :

(a) $\mathbb{Z}_p$ est compact ;

(b) tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ est limite d'une unique suite (x_n) de $(\mathbb{Z}, d_p)$ telle que

$$0 \leq x_n \leq p^n - 1, \quad x_{n+1} \equiv x_n \bmod (p^n).$$

9. En déduire que tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente

$$\lambda = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

avec $0 \leq a_i \leq p - 1$.

5 Compléments sur la compacité

Exercice 152 (Théorèmes de point fixe) Soit (E, d) un espace métrique compact, et $f : E \to E$ (qu'on ne supposera pas continue *a priori*).

1. On suppose que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$, $x \neq y$.

   (a) Montrer que f a un unique point fixe a. (*indication* : considérer $x \mapsto d(x, f(x))$).

   (b) Soit $K \subset E$ un fermé non vide tel que $f(K) \subset K$, montrer que $a \in K$.

   (c) Montrer que pour tout x, la suite $f^n(x)$ converge vers a.

2. On suppose que pour tous $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$.

   a) Montrer qu'il existe une extraction σ telle que $(f^{\sigma(n)}x)_n$ et $(f^{\sigma(n)}y)_n$ convergent.

   b) Quelle est la limite de $(f^{\sigma(n+1)-\sigma(n)}x)_n$?

   c) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ (*Indication* : $\sigma(n+1) - \sigma(n) \geq 1$).

   d) Montrer que f est surjective.

Exercice 153 Dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme uniforme, on considère une famille $\mathcal{F}$ équicontinue et telle que

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], \quad \mathcal{F}(x) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}\} \quad \text{est borné.}$$

Montrer que de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite convergente (dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$).

Exercice 154 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Montrer que le sous-ensemble de E des fonctions affines par morceaux est dense dans E.