TD n° 3

Exercice 1. Pour commencer
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $|2x+1| < 1$;
2. $|x-1| < |x+1|$.

Exercice 2. Fonctions très usuelles

1. Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :
   (a) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et f a pour pente 2.
   (b) Le graphe de f passe par le point de coordonnées $(2;3)$ et on a $f'(-2) = 4$
   (c) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(2;1)$
2. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto 2|x-1| - |x+1|$

Exercice 3. Domaine de définition, parité
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et dire si la fonction est paire ou impaire :

1. $f \ : \ x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.
2. $f \ : \ x \mapsto \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;
3. $f \ : \ x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
4. $f \ : \ x \mapsto x^3 + x + 1$;
5. $f \ : \ x \mapsto x^2 - x - 1$.

Exercice 4. Dérivation

1. Préciser le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f \ : \ x \mapsto \sqrt{1 + (\cos(x))^2}$.
   (b) $\dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \cos(3x+1)$
   (b) $x \mapsto \cos(x^2)$
   (c) $x \mapsto (x^2+1)e^{2x}$
   (d) $x \mapsto (x^2-2x+3)^5$
   (e) $x \mapsto \sin^3(4x)$.
   (f) $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
   (g) $\sqrt{\ln(x)}$
   (h) $\exp(-x^2+2x-1)$
   (i) $\dfrac{1}{x^3-2x-3}$
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer, en fonction de f et f', la dérivée de $x \mapsto \sin\left(f(x)^2\right)$ et de $x \mapsto \sin\left(f(x^2)\right)$.

Exercice 5. Étude de fonctions

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,\pi[$ on a $x\cos(x) - \sin(x) < 0$.
2. Étudier le sens de variation de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0,\pi[$.

3. Montrer que, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.

Exercice 6. Étude de fonctions

Pour tout α réel, on définit sur $I =]0, +\infty[$ $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$.

1. Montrer que f_α est dérivable sur I et montrer que $f'_\alpha = \alpha f_{\alpha-1}$.
2. Si α et β sont deux réels, montrer que $f_\alpha \times f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

On convient de noter $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Étudier $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha > 0$ puis pour $\alpha < 0$.

Exercice 7. Théorèmes classiques de l'analyse

1. Montrer que l'équation $x \ln(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
2. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)\sin(x)$ et en déduire que l'équation

$$\left(x^2 + 1\right) \cos x + 2x \sin x = 0$$

   admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \pi]$.
4. On considère un cycliste qui parcourt 90 km en 4 heures. on suppose que la distance $d(t)$ parcourue entre l'instant 0 et le temps t est une fonction continue de t. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45 km.
5. Montrer que pour tout a et tout b réels, on a $|\cos a - \cos b| \leq |b - a|$.

Exercice 8. Développements limités

1. Calculer les DL des fonctions suivantes, aux points et à l'ordre indiqués :

   (a) $\dfrac{e^x - 1}{cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3

   (b) $e^x \ln x$ en 2 à l'ordre 2

   (c) $\sqrt{1 + \cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3

   (d) $\tan(x)$ en π à l'ordre 3

   (e) $\sin(\ln(1 + x))$ en 0 à l'ordre 3

   (f) $\sqrt{x}$ en 1 à l'ordre 3

2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln(\dfrac{e^x - 1}{x})$

Exercice 9. (Pour aller plus loin)

Soit f la fonction définie par $x^3 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?