Année 2018-2019 | Université Grenoble Alpes, Polytech', $3^{\text{ième}}$ année
Maths S6 | Filières, IESE et Info

TD n° 2

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(t)|$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Déterminer le nombre minimum d'harmonique nécessaire pour transmettre au moins 90% de la puissance du signal f.

Exercice 2.
En explicitant les fonctions qu'on utilise et traçant leurs courbes, montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\pi t - t^2 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 3.
On cherche à déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ et 2π-périodiques qui vérifient sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $f'' = -\mathrm{e}^{it} f$.

1. Justifier l'existence des coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ de f.
2. Justifier l'existence des coefficients de Fourier complexes $c_n(f'')$ de f'' et le fait que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$c_n(f'') = -n^2 c_n(f).$$
Justifier par ailleurs que $c_n(f'') = -c_{n-1}(f)$.
3. En déduire que pour tout $n < 0$, $c_n(f) = 0$ et que, pour tout $n > 0$,
$$c_n(f) = \frac{c_0(f)}{(n!)^2}.$$
4. En déduire que les fonctions f qui conviennent sont toutes multiples d'une même fonction qu'on explicitera sous la forme d'une série trigonométrique.

Exercice 4.
Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1/t^2 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Exercice 5. On note Λ la fonction triangle définie par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Faire la représentation graphique de la fonction Λ.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ.
3. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi x)}{\pi^4 x^4} dx$$

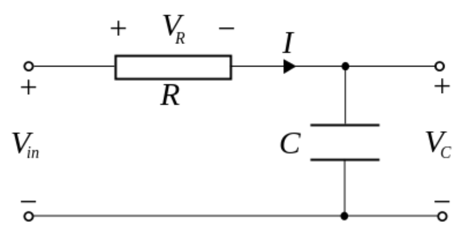
Exercice 6. Lien entre série de Fourier et transformée de Fourier
Soit f la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et soit g la fonction 2π-périodique impaire et définie sur $[0, \pi]$ par $g(t) = t$.

1. Tracer les graphes de f et g et comparer ces deux fonctions.
2. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(g)$ de g pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
4. Comparer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n)$ et $c_n(g)$.

Exercice 7. Circuit RC
On considère le circuit RC suivant : l'équation donnant V_C en fonction de V_in est



$$RCV_\text{C}' + V_\text{C} = V_\text{in} \tag{E}$$

1. (facultatif) Retrouver l'équation en utilisant les lois classiques d'électroniques (loi des mailles, loi des nœuds, loi d'ohm, ...).
2. Calculer $\widehat{V_\text{C}}$ en fonction de $\widehat{V_\text{in}}$.
3. Pour $\alpha > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction f_α définie par,
$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
puis de la fonction f_α définie par,
$$g_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
4. Donne une solution de (E) lorsque $V_\text{in} = g_\alpha$. On discutera en fonction de la valeur de α.