Année 2018-2019
Maths S6

Université Grenoble Alpes, Polytech', $3^{\text{ième}}$ année
Filières, GGC, MAT et PRI

TD n° 1

**Exercice 1.**

Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier et les principales harmoniques d'un signal.

**Partie A**

Pour tout entier naturel $n$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin n\dfrac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}.$$

3. Déterminer $I_1$, $I_2$ et $I_3$, puis $J_1$, $J_2$ et $J_3$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période $2\pi$, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}.$$

où $E$ est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ avec $E = 2$.
2. Soit $a_0$ et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $a_n$ et $b_n$ les coefficients de Fourier associés à $f$.
   (a) Calculer $a_0$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de $b_n$.
   (c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer $a_{4k}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

**Partie C**

1. Déterminer les coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$.
2. Calculer $F^2$, carré de la valeur efficace de la fonction $f$ sur une période.
   On rappelle que dans le cas où $f$ est paire, périodique de période $T$, on a :

$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne
$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$
Soit $P$ le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$. Calculer $P$, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\frac{P}{F^2}$.
*Ce dernier résultat très proche de* 1*, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à* 3.

**Exercice 2.**

1. En utilisant le théorème de Parseval, prouver que deux fonctions continues $2\pi$-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.
2. Soit $f$ la fonction créneau définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$, $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$, et prolongée par $2\pi$-périodicité. Quelle est la régularité de cette fonction ? Que dire de la série de Fourier de $f$ en 0 ?
3. Soit $f$ la fonction paire $2\pi$-périodique définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$. La fonction $f$ est-elle $C^1$ par morceaux ?
4. Soit $f$ une fonction continue $2\pi$-périodique. Montrer que $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.
5. On suppose de plus que $f$ est de classe $C^k$. Prouver que $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$.

**Exercice 3. . Équation de la chaleur**

On considère une barre métallique de longueur $L$, qu'on représente par le segment $[0, L]$. La température à l'instant $t$ au point d'abscisse $x$ est notée $u(x, t)$. On pose $Q = ]0, L[\times]0, +\infty[$. La fonction $u$ est supposée continue sur $\overline{Q}$ et de classe $C^\infty$ sur $Q$. Elle vérifie en outre les conditions suivantes :
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{si } (x, t) \in Q, \tag{1}$$
$$u(x, 0) = h(x) \quad \text{si } x \in [0, L] \tag{2}$$
(condition initiale), où $h$ est une fonction de classe $C^1$ sur $[0; L]$ avec $h(0) = h(L) = 0$.
Et
$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{si } t \in [0, +\infty[. \tag{3}$$
On va démontrer l'existence d'une solution à ce problème.

1. Montrer que si la fonction $u$ s'écrit sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$ (où $f$ et $g$ ne s'annule pas sur $Q$) et si $u$ est solution de (1), alors les fonctions $f$ et $g$ vérifient chacune une équation différentielle simple.
2. Résoudre ces équations différentielles en tenant compte de (3). En déduire qu'une fonction qui s'écrit :
$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} t}$$
(en admettant que la série converge et qu'on peut la dériver terme à terme) est une solution de (1) et de (3).
3. Soit $\tilde{h}$ la fonction déduite de $h$ par imparité et $2L$-périodicité. Développer $\tilde{h}$ en série de Fourier. Quelle valeur donner aux $a_n$ ?
4. Justifier que la fonction ainsi exhibée est bien solution du problème.