Polytech Grenoble

Université Grenoble Alpes

2018-2019

Version préliminaire

Table des matières

Chapitre 1. Les nombres complexes 3
1. Rappels 3
1.1. Interprétation géométrique 4
1.2. Racines de l'unité 5
1.3. Équation du second degré 6
2. Impédance complexe : circuits passifs 6
3. Exercices 7

Chapitre 2. Rappels sur les polynômes 9
0.1. Introduction 9
0.2. Opérations 9
0.3. Dérivation 10
0.4. Formule de Taylor 11
0.5. Division euclidienne 12
0.6. Arithmétique des polynômes 14
1. Exercices 14
2. Fractions rationnelles 16
3. Décomposition en éléments simples 17
3.1. Le cas de **C** 17

Chapitre 3. Espaces vectoriels 21
1. Définitions 21
2. Applications linéaires 25
2.1. Détermination pratique du rang 27
2.2. Sous-espaces supplémentaires 27

Chapitre 4. Calcul matriciel 29
1. Définitions 29
2. matrices lignes, matrices colonnes 30
3. matrices carrées 31
4. Autres matrices particulières 31
5. changement de base 31
6. Déterminant 33
6.1. Calculs 33
6.2. Calcul de A^{-1} 35

Chapitre 1

Les nombres complexes

1. Rappels

Rappelons qu'il existe un ensemble, noté $\mathbf{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

— $\mathbf{C}$ contient l'ensemble $\mathbf{R}$ des réels ;

— $\mathbf{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbf{R}$;

— $\mathbf{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;

— tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.

  — On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathscr{R}e(z)$.

  — On dit que b est la partie imaginaire [1] de z et on la note $b = \mathscr{I}m(z)$.

  — Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

Proposition 1.1. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :*

$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \ \text{ et } \ b = b'$$

En particulier :

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \text{ et } \ b = 0$$

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$

- produit : $zz' = (a+bi)(a'+b'i) = aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2 = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i.$
- identités remarquables : elles restent valides dans $\mathbf{C}$, en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Définition 1.1. Soit $z = a + ib$ un complexe. Le *conjugué* de z est le complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 1.2. [Binôme de Newton] *Soient z_1 et z_2 deux complexes. pour tout entier n,*

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z_1^k z_2^{n-k}.$$

— $z \in \mathbf{R}$ est donc équivalent à $\bar{z} = z$.

— Dire que z est imaginaire pur est équivalent à dire que $z + \bar{z} = 0$.

Proposition 1.3. *Soient z et z' deux complexes. On a*

1. Bien remarquer que la partie imaginaire d'un complexe est un *réel*

— $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

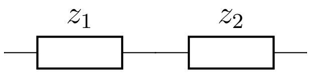
— $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

— $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ *pour tout naturel* n.

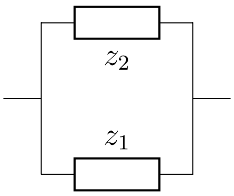
— *Si* $z' \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Remarque 1.1. Pour tout complexe z on a $\overline{\overline{z}} = z$ et, si $z = a + ib$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Exemple 1.1. Si on monte en série deux impédances z_1 et z_2, l'impédance du circuit obtenu est $z_1 + z_2$.



Si, par contre, on les monte en parallèle, l'impédance du circuit est égale au produit $z_1 z_2$.



1.1. **Interprétation géométrique.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

À tout complexe $z = a + bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a; b)$ appelés point d'affixe et vecteur d'affixe z.

Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z dans le plan complexe.

Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM : $|z| = OM$.

Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$: $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$.

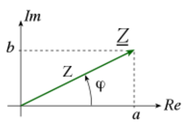


FIGURE 1. Module et argument

Remarque 1.2. Pour tout complexe non nul z :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

z est un réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0 \quad (\pi)$.

z est un imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

Proposition 1.4. *Soit z un complexe* non nul. *Il existe un réel $r > 0$ et un réel θ tels que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \textit{avec} \quad r = |z| \ \textit{ et } \ \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

Si $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Proposition 1.5. **[Inégalité triangulaire]** *Soient z et z' deux complexes. On a*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Proposition 1.6. *Soient z et z' deux complexes non nuls. On a*

— $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

— $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$

— *Pour tout entier n,* $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad (2\pi)$

— $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$.

— $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$.

1.1.1. *Notation exponentielle et applications.* Si z est un complexe de module 1, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Notant f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, on vérifie que $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$ et $f(0) = 1$. On note alors

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Définition 1.2. Tout nombre complexe *non nul* de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

Proposition 1.7. *Pour tout réel θ on a*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple 1.2. On se sert des formules d'Euler pour *linéariser* $(\cos\theta)^n$ *etc ...* en utilisant le binôme de Newton.

$$(\cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right).$$

Remarque 1.3. Soient $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$ deux complexes de module 1. On a

$$z_1 + z_2 = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

1.2. **Racines de l'unité.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier non nul. Si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et on peut donc écrire $z = re^{i\theta}$ de plus,

$$z^n = 1 \Longleftrightarrow r = 1 \quad \text{et } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

On a donc n racines de l'unité souvent notées

$$\xi_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$

Si $z_0 \neq 0$, pour résoudre l'équation $z^n = z_0$, on utilisera la forme exponentielle.

1.3. **Équation du second degré.** Soient a, b et c des complexes avec $a \neq 0$. Comme

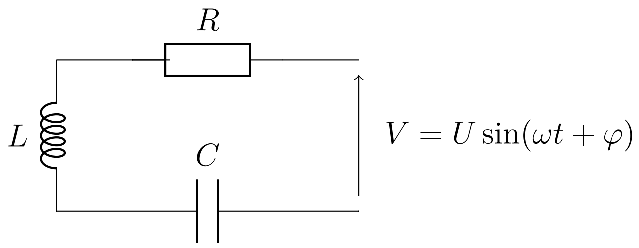
$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ revient à chercher un complexe δ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. On obtient alors

$$X = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

2. Impédance complexe : circuits passifs

Considérons un dipôle linéaire constitué de composants passifs R, L et C. auquel on applique une tension sinusoïadale $V = U \sin(\omega t + \varphi)$.



Si $\tilde{U} = Ue^{i(\omega t + \varphi)}$ et $\underline{U} = Ue^{i\varphi}$, alors

(1) $U = \left|\tilde{U}\right|$.

(2) $\arg(\underline{U}) = \varphi \ \ mod(2\pi)$.

Si $i(t)$ est l'intensité dans le circuit, on définit *l'impédance complexe* Z par $U = Zi$.

(1) Pour une résistance, $Z_R = R$

(2) Pour une inductance, on a $U = L\dfrac{di}{dt}$ et $Z_L = iL\omega$. On a donc un déphasage de $+\pi/2$

(3) Pour une capacitance, $i = C\dfrac{du}{dt}$ et $Z_C = -\dfrac{i}{C\omega}$. Le déphasage est égal à $-\pi/2$.

Pour des dipôles en série, les impédances s'ajoutent. pour un circuit en parallèle, puisque les courants s'additionnent on a $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$.

3. Exercices

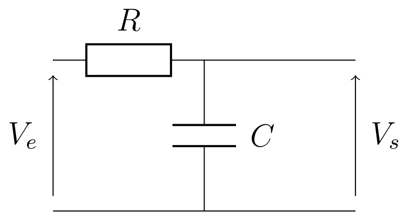
Exercice 1 Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les complexes :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 3 Calculer le module et l'argument de $u=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\dfrac{u}{v}$.

Exercice 4 Considérons le circuit RC suivant :



Ce filtre RC a pour fonction de transfert

$$H(f)=\frac{V_s}{Ve}=\frac{1}{1+iRC\omega}.$$

Si, par exemple $H(f)=\dfrac{1}{1+i(0.1)f}$, calculer le module et l'argument de $H(f)$ pour $f=1Hz$, $f=5Hz$, $f=10Hz$, $f=20Hz$ et $f=100Hz$.

De quel type de filtre s'agit-il ?

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 6

(1) Résoudre $z^3=1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.

(2) Résoudre $z^n=1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\epsilon,\dots,\epsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in\mathbf{N}$, $1+\epsilon^p+\epsilon^{2p}+\cdots+\epsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 7 Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 8 Déterminer module et argument de $e^{\text{ß}\theta}+1$ et de $e^{\text{ß}\theta}-1$ pour $\theta \in \mathbf{R}$.

Exercice 9 Simplifier $\dfrac{e^{\text{ß}\theta}-1}{e^{\text{ß}\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi,\pi[$.

Chapitre 2

Rappels sur les polynômes

0.1. **Introduction.** Dans tout ce qui suit, on note $\mathbf{K}$ l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 0.1. Un *polynôme* P de degré $n \in \mathbf{N}^*$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est déterminé par la donnée de $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$ avec $a_n \neq 0$. On écrit alors P sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k.$$

Dans cette écriture, X est un symbole appelé *indéterminée.*

Remarques 0.1. Le *degré* d'un polynôme P est noté d^oP ou parfois $deg(P)$.
Une constante $a \neq 0$ s'identifie à polynôme de degré 0.
La constante 0 est appelée le *polynôme nul.* On dit parfois qu'il est de degré $-\infty$.

L'ensemble de tous les polynômes est noté $\mathbf{K}[X]$ (en notant X l'indéterminée) et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note

$$\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X],\ d^oP \leq n\}.$$

Remarque 0.1. Si $p \leq q$, alors $\mathbf{K}_p[X] \subset \mathbf{K}_q[X]$, ainsi $X^2 + 1 \in \mathbf{K}_2[X]$ mais on a aussi $X^2 + 1 \in \mathbf{K}_3[X]$.

0.2. **Opérations.** Soit deux polynômes

$$P(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n$$
$$Q(X) = q_0 + q_1X + \cdots + q_mX^m.$$

Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut supposer que $n = m$. On définit alors le polynôme somme $P + Q$ par

$$(P + Q)(X) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)X + \cdots + (p_n + q_n)X^n.$$

Si α et β sont des *scalaires i.e.* des éléments de $\mathbf{K}$, $\alpha P + \beta Q$ est un polynôme. Muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires, $\mathbf{K}[X]$ (de même que $\mathbf{K}_n[X]$) est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 0.2. Soient P et Q deux polynômes.On définit aussi le polynôme produit PQ par :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} a_kX^k \quad \text{où} \quad a_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq m}} p_iq_j.$$

Remarque 0.2. Avec cette définition, on notera que $X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$.

Ces opérations possèdent les propriétés suivantes : Soient pour P, Q, R des polynômes,

— $P + Q = Q + P$, $P + 0 = P$ et $(P + Q) + R = P + (Q + R)$

— Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, il existe un polynôme Q, $Q = -p_0 - p_1 - \cdots - p_n X^n$ tel que $P + Q = 0$

— $PQ = QP$, $P.1 = P$ et $(PQ)R = P(QR)$

— $P(Q + R) = PQ + PR$

La proposition suivante résulte des définitions :

Proposition 0.1.

(1) $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X]$, $d^o(P + Q) \leq \max(d^o P, d^o Q)$.

(2) $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $d^o(PQ) = d^o P + d^o Q$.

Définition 0.3. Si P est de *degré* n i.e. $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$ avec $p_n \neq 0$, ce coefficient p_n est appelé *coefficient dominant* de P. S'il est égal à 1, le polynôme est dit *unitaire*.

Soit

$$P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n \in \mathbf{K}[X]$$

et $a \in \mathbf{K}$. On appelle *évaluation* de P en a ou valeur de P en a le scalaire ($\in \mathbf{K}$) $p_0 + p_1 a + \cdots + p_n a^n$ noté $P(a)$.

Définition 0.4. L'application $\begin{cases} \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \\ a \longmapsto P(a) \end{cases}$ est appelée application polynômiale associée à P.

Définition 0.5. On dit que P est *racine* de P si $P(a) = 0$.

0.3. **Dérivation.**

Définition 0.6. Soit $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$ un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$. On appelle *polynôme dérivé* de P et on note P' le polynôme

$$P'(X) = p_1 + 2p_2 X + \cdots + np_n X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) p_{k+1} X^k.$$

Si P est constant, on pose $P' = 0$.

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $P \in \mathbf{R}[X]$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P'(x)$ est égal à la dérivée en x de $t \longmapsto P(t)$.

Proposition 0.2. — $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $d^o P' = d^o P - 1$

— $(P + Q)' = P' + Q'$

— $(\lambda P)' = \lambda P'$ *pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$.

— $(PQ)' = P'Q + PQ'$

On définit par récurrence les dérivées successives d'un polynôme P en posant : $\begin{cases} P^{(1)} = P' \\ P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)' \quad n \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$

Proposition 0.3. *Pour* $a \in \mathbf{K}$, $r, k \in \mathbf{N}^*$,

$$((X - a)^r)^{(k)} = \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-k+1)(X-a)^{r-k} & si\ k \leq r \\ 0 & si\ k > r \end{cases}$$

Démonstration. Commençons par calculer la dérivée de $(X-a)^p$ pour $p \in \mathbf{N}$. Par la formule du binôme de Newton, nous avons

$$(X-a)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i (-a)^{p-i} X^i.$$

D'où

$$[(X-a)^p]' = \sum_{i=1}^{p} C_p^i (-a)^{p-i} i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^{i+1} (-a)^{p-i-1} (i+1) X^i = p \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i (-a)^{p-i-1} X^i.$$

car $(i+1)C_p^{i+1} = pC_{p-1}^i$.
On applique à nouveau la formule du binôme et on obtient

$$[(X-a)^p]' = p(X-a)^{p-1}.$$

Ainsi, le résultat annoncé est vrai pour $k=1$. Une récurrence facile montre qu'il est vrai pour $k \leq r$.
Pour $k=r$, nous obtenons $[(X-a)^r]^{(r)} = r!$. Cela entraîne donc que

$$[(X-a)^r]^{(k)} = 0$$

pour $k \geq r$. $\square$

0.4. **Formule de Taylor.**

Proposition 0.4. *Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbf{N}$) à coefficients dans $\mathbf{K}$, et soit $a \in \mathbf{K}$. Alors*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Démonstration. Ecrivons

$$P(X) = \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell X^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} p_\ell (a + X - a)^\ell.$$

Si on développe chaque terme $(a+X-a)^\ell$ par la formule du binôme

$$(a+X-a)^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} C_\ell^i a^{\ell-i} (X-a)^i,$$

on obtient

$$P(X) = \sum_{r=0}^{n} b_r (X-a)^r$$

avec certains coefficients b_r qu'il n'est pas la peine de calculer. Cette formule donne, par dérivation à l'ordre $k \leq n$

$$P^{(k)}(X) = \sum_{r=0}^{n} b_r \left((X-a)^r\right)^{(k)} = \underbrace{\sum_{r=0}^{k-1} b_r \left((X-a)^r\right)^{(k)}}_{=0} + \sum_{r=k}^{n} b_r \left((X-a)^r\right)^{(k)}$$

$$= \sum_{r=k}^{n} b_r r(r-1)\cdots(r-k+1)(X-a)^{r-k} = b_k k! + \sum_{r=k+1}^{n} b_r r(r-1)\cdots(r-k+1)(X-a)^{r-k}.$$

En évaluant cette quantité en a, nous obtenons $P^{(k)}(a) = b_k k!$ c'est à dire $b_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\cdot$ On trouve donc bien

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

□

0.5. **Division euclidienne.**

Théorème 0.1. *Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que*

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad d^o(R) < d^o(B).$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Supposons que nous ayons

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$$

avec $d^oR_1 < d^oB$ et $d^oR_2 < b^oB$. Alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Si $Q_1 \neq Q_2$, *i.e.* $Q_1 - Q_2 \neq 0$, on a $d^o\Big(B(Q_1 - Q_2)\Big) = d^oB + d^o(G_1 - Q_2) \geq d^oB$ et $d^o(R_2 - R_1) \leq \max(d^oR_1, d^oR_2) < d^oB$ d'où contradiction.

Si $d^0B > d^0A$, il suffit de prendre $Q = 0$ et $R = A$. Sinon, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ tels que $A - \alpha X^k B$ soit de degré strictement inférieur à celui de A. On procède alors par récurrence. □

Le procédé décrit ci-dessus est appelé division euclidienne de A et B. Q est le *quotient* et R est le *reste.*

Définition 0.7. Soit $A, B \in \mathbf{K}[X]$. Si il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$, on dit que B divise A, ou que B est un diviseur de A, ou que A est un multiple de B, et on note $B|A$.
L'ensemble des multiples de B est noté $B\mathbf{K}[X] = \{BQ,\ Q \in \mathbf{K}[X]\}$. Ainsi $B|A \iff A \in B\mathbf{K}[X]$.

Proposition 0.5. *Soient $A, B, C \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}^*$,*

— $A|B \iff \alpha A|B \iff A|\alpha B$, $B|A \Rightarrow B|AC$

— $B|A$ *et* $B|A' \Rightarrow B|(A + A')$

— $B|A$ *et* $C|B \Rightarrow C|A$ *et* $B|A \neq 0 \Rightarrow d^oA \geq d^oB$

— $B|A$ *et* $A|B \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbf{K}^*,\ A = \gamma B$

Proposition 0.6. *Soit $a \in \mathbf{K}$. a est racine de P si et seulement si $(X - a)|P$.*

Démonstration. Par division euclidienne, $P = (X - a)Q + R$ avec $d^oR < d^o(X - a)$. Le polynôme R est donc constant. La valeur de la constante R s'obtient en évaluant P en a et nous avons $P(a) = R$. Ainsi $P = (X - a)Q + P(a)$ et le résultat en découle. □

Définition 0.8. Soir $P \in \mathbf{K}[X]$ et $a \in \mathbf{K}$. On dit que a est racine d'ordre r $(r \in \mathbf{N}^*)$ de P si il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X - a)^r Q$$

avec $Q(a) \neq 0$.

On voit alors, en utilisant la formule de Taylor que a est racine d'ordre r si et seulement si

$$P(a) = 0,\ \ P'(a) = 0, \cdots, P^{(r-1)}(a) = 0,\ \text{et}\ P^{(r)}(a) \neq 0.$$

Exemple 0.1. $P = X^5 - 9X^4 + 25X^3 - 9X^2 - 54X + 54$, $a = 3$.
$P = (X-3)(X^4-6X^3+7X^2+12X-18) = (X-3)^2(X^3-3X^2-2X+6) = (X-3)^3(X^2-2)$.
3 est donc racine d'ordre 3 du polynôme P.

L'entier r est appelé *ordre de multiplicité* de la racine.
Si a est racine de P, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$ avec $d^0Q < d^0P$. Il en résulte par récurrence qu'un polynôme de degré k admet *au plus* k racines (distinctes ou non).

Définition 0.9. Un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ est dit *irréductible* s'il est non constant et s'il n'est pas produit de polynômes non constants.

Théorème 0.2. [Théorème de d'Alemebert Gauss] *Soit P un polynôme* non constant *de $\mathbf{C}[X]$. Alors, P admet une racine dans $\mathbf{C}$.*

Il en résulte, par récurrence, que dans $\mathbf{C}$, tout polynôme non constant de degré n admet n racines (en comptant avec multiplicité).

Proposition 0.7. *Dans $\mathbf{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.*

Définition 0.10. Un polynôme P non constant est dit scindé s'il est produit de polynômes du premier degré :

$$P(X) = \alpha \prod (X - \alpha_i)^{p_i}\,, \quad \alpha \in \mathbf{K}$$

avec $\alpha_i \in \mathbf{K}$.

Dans $\mathbf{C}$, tout polynôme est scindé. Ce n'est pas vrai sur $\mathbf{R}$.

Théorème 0.3. *Les polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ sont*

- *les polynômes de degré 1.*
- *les polynômes de degré 2 sans racine dans $\mathbf{R}$ i.e. de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.*

Tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré ≥ 1 s'écrit donc comme produit de polynômes de cette forme.

Démonstration. Les polynômes mentionnés sont clairement irréductibles. Il reste à voir que tout $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $d^oP \geq 1$ est divisible par un polynôme du type mentionné. Si P a une racine réelle, c'est clair. Sinon, P peut être considéré comme appartenant à $\mathbf{C}[X]$ et il a une racine $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ grâce au théorème de d'Alembert. Si on pose $P(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_dX^d$, on a $p_0 + p_1a + \cdots + p_da^d = 0$. Comme les coefficients $p_0, \ldots, p_d$ sont réels, nous avons

$$p_0 + p_1\bar{a} + \cdots + p_d\bar{a}^d = 0.$$

Dons $\bar{a}$ est racine de P. Ainsi P est divisible par les deux polynômes irréductibles (dans $\mathbf{C}[X]$) distincts $X - a$ et $X - \bar{a}$, donc par le produit

$$(X-a)(X-\bar{a}) = X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2$$

qui est un polynôme de degré 2 de $\mathbf{R}[X]$ irréductible. □

0.5.1. *Division suivant les puissances croissantes.*

Proposition 0.8. *Soit deux polynômes A et B avec $B(0) \neq 0$ et un entier naturel n. Alors il existe un unique couple (Q, P) de polynômes tel que*

$$A = BQ + X^{n+1}P \quad \text{et} \quad d^oQ \leq n.$$

Ce résultat, admis, sert parfois dans le calcul de développements limités.

0.6. **Arithmétique des polynômes.**

Théorème 0.4. *Soient A et B dans $\mathbf{K}[X]$, il existe un unique polynôme D unitaire ou nul tel que l'ensemble des diviseurs communs à A et B soit l'ensemble des diviseurs de D. On dit que D est le* pgcd *de A et B.*

Si $A = BQ+R$, alors $pgcd(A,B) = pgcd(B,R)$ de sorte que l'algorithme d'Euclide permet de trouver le *pgcd* de deux polynômes.

Théorème 0.5. [Identité de Bézout] *Soient A et B deux polynômes et D leur pgcd. Il existe des polynômes U et V tels que*

$$AU + BV = D.$$

Remarque 0.3. Ces polynômes ne sont pas uniques. Cependant, l'algorithme d'Euclide permet de trouver un couple solution.

Définition 0.11. Deux polynômes sont dits *premiers entre eux* si leur pgcd est égal à 1.

1. Exercices

Exercice 10 Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Exercice 11

(1) Effectuer la division euclidienne de A par B :
   (a) $A = 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B = X^2 + 2X + 3$
   (b) $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B = X^3 + X + 2$
   (c) $A = X^4 - X^3 + X - 2,\ B = X^2 - 2X + 4$
   (d) $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B = X^2 - 5X + 4$

(2) Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B à l'ordre k (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^{k+1}) :
   (a) $A = 1 - 2X + X^3 + X^4,\ B = 1 + 2X + X^2,\ k = 2$
   (b) $A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6,\ B = 1 + X^2 + X^3,\ k = 4$

Exercice 12 À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 13

(1) Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$ les polynômes suivants :

$a)$ $X^3 - 3$ $\quad$ $b)$ $X^{12} - 1$ $\quad$ $c)$ $X^6 + 1$ $\quad$ $d)$ $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

(2) Factoriser les polynômes suivants :

$a)$ $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$ $\quad$ $b)$ $X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$

Exercice 14 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 0, \dots, n$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*). Calculer $L_i(a_j)$.

Soient $b_0, \dots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :

$$P(a_j) = b_j \quad \text{pour tout } j = 0, \dots, n.$$

Application. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Exercice 15 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2 ; on veut montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

(1) Énoncer le théorème de Rolle.

(2) Si x_0 est racine de P de multiplicité $m \geq 1$, déterminer sa multiplicité dans P' ?

(3) Prouver le résultat énoncé.

Exercice 16 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$P_n - P'_n = X^n$$

Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 17 Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$X^4 - 1, \quad X^5 - 1 \text{ et } \quad (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$

Exercice 18 Soient $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1.$$

2. Fractions rationnelles

Dans l'ensemble $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]^*$ on définit une addition et une multiplication de la façon suivante :

$$(P_1, Q_1)+(P_2, Q_2) = (P_1Q_2 + P_2Q_1, Q_1Q_2) \quad \text{et} \quad (P_1, Q_1)\cdot(P_2, Q_2) = (P_1P_2, Q_1Q_2)\,.$$

On vérifie que ces opérations ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbf{Q}$ et on dit que $(P, Q) \sim (P', Q')$ – lire (P, Q) équivalent à (P', Q') si $PQ' = P'Q$. On note $(P_1, Q_1) = \dfrac{P_1}{Q_1}$. Un couple (P, Q) est toujours équivalent à un unique couple (P', Q') où P' et Q' sont premiers entre eux (i.e. leur *pgcd* est égal à 1). On dit alors que $\dfrac{P'}{Q'}$ est le *représentant irréductible* de la fraction. Nous noterons $\mathbf{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles muni des opérations définies ci-dessus.

Les opérations peuvent donc s'écrire

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \quad \text{et} \quad \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

Si $(P, Q) \sim (P', Q')$, il n'est pas difficile de voir que $d^0P - d^0Q = d^0P' - d^0Q'$:

Définition 2.1. L'entier (relatif) $d^0P - d^0Q$ est le *degré* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$.

Exemple 2.1. La fraction $\dfrac{(X-1)(X^2+X+1)}{X(X-1)^2}$ n'est pas irréductible. sa forme irréductible est $\dfrac{X^2+X+1}{X(X-1)}$ qui est de degré 0.

Définition 2.2. Si Q est un polynôme, notons Z_Q l'ensemble des racines de Q. La *fonction rationnelle* associée à $\dfrac{P}{Q}$ est l'application

$$x \in \mathbf{K} \setminus Z_Q \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction sous forme irréductible. Les *zéros* de F sont les racines de P. Les racines de Q sont les *pôles* de F si α est un pôle de F de multiplicité p, on dit que (α, p) est pôle de F.

Proposition 2.1. *Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbf{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) où E est un polynôme, G une fraction irréductible de degré < 0 te que*

$$\frac{A}{B} = E + G.$$

On dit que E est la partie entière de F.

Démonstration. Par division euclidienne des polynômes on a :

$$A = BE + R \quad d^0R < d^0B.$$

On a donc $\dfrac{A}{B} = E + \dfrac{R}{B}$ et la condition $d^0R < d^0B$ montre que $\dfrac{R}{B}$ est de degré strictement négatif. $\square$

Si $d^0A < d^0B$, autrement dit si $d^0F < 0$, la partie entière est nulle. Sinon, la division euclidienne de A par B donne la partie entière.

Exemple 2.2. Si $F(X) = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$, la partie entière est égale à $X^2 + 2X + 3$.

Définition 2.3. On définit la *fraction dérivée* de $\dfrac{P}{Q}$ par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

3. Décomposition en éléments simples

La décomposition des polynômes en facteurs irréductibles va nous permettre d'écrire les fractions comme somme de fractions « plus simples » .

3.1. Le cas de C.

Comme souvent, tout est plus simple dans $\mathbf{C}$ car les polynômes y sont scindés.

Commençons par étudier le cas particulier d'une fraction de la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-\alpha)^k} = E(X) + \frac{R(X)}{(X-\alpha)^k} \quad \text{avec } d^0R = r < k.$$

La formule de Taylor appliquée à R au point α nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{R(X)}{(X-\alpha)^k} &= \frac{\sum_{j=0}^{r} \frac{R^{(j)}(a)}{j!}(X-\alpha)^j}{(X-\alpha)^k} \\
&= \sum_{j=0}^{r} \frac{R^{(j)}(a)}{j!(X-\alpha)^{k-j}} \\
&= \sum_{p=1}^{k} \frac{a_p}{(X-\alpha)^p} \\
&= \frac{a_1}{(X-\alpha)} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_k}{(X-\alpha)^k}.
\end{aligned}$$

On montre alors par récurrence le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit* $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbf{C}(X)$ *de pôles* $(\alpha_1, n_1), \cdots, (\alpha_k, n_k)$*. Il existe un unique polynôme* E *et des complexes* $(\lambda_{i,j})$ *avec* $0 \leq i \leq k$ *et* $0 \leq j \leq n_j$ *tels que*

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-\alpha_i)^j}.$$

On dit que E est la partie entière de F et $\delta frac \lambda_{i1} X - \alpha_i + \dfrac{\lambda_{i2}}{(X-\alpha_i)^2} + \cdots + \dfrac{\lambda_{in_i}}{(X-\alpha_i)^{n_i}}$ est la *partie polaire* associée au pôle α_i.

Dans les cas *très simples* on peut obtenir la décomposition de F par identification en « réduisant au même dénominateur » . C'est cependant une méthode extrêmement lourde.

Exemple 3.1. Soit $F = \dfrac{X}{X^2-4}$. Commençons par factoriser le dénominateur : $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, on a donc une décomposition en éléments simples du type $F = \dfrac{a}{X-2} + \dfrac{b}{X+2}$. En réduisant au même dénominateur, il vient $\dfrac{X}{X^2-4} = \dfrac{(a+b)X + 2(a-b)}{X^2-4}$ et en identifiant les coefficients, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=0 \end{cases}$. Ainsi $a = b = \dfrac{1}{2}$ et

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{X-2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}$$

(1) **[Pôle simple]** Si $F(X) = E(X) + \dfrac{P(X)}{(X-a)Q(X)} = E(X) + \dfrac{\lambda}{(X-a)} + G(X)$ où E est un polynôme et $Q(a) \neq 0$ (pôle *simple*) alors, a n'est pas un pôle de G et $(X-a)F(X) = (X-a)E(X) + \dfrac{P(X)}{Q(X)} = (X-a)E(X) + \lambda + G(X)$. En évaluant au point a on obtient donc

$$\alpha = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Exemple 3.2. Reprenant l'exemple ci-dessus,

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{X}{(X-2)(X+2)} = \frac{\lambda_1}{X-2} + \frac{\lambda_2}{X+2}$$

on obtient λ_1 en multipliant (mentalement !) par $X-2$ et en remplaçant X par 2 :

$$\left(\frac{X}{X+2}\right)_{|(X=2)} = \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{X}{X-2}\right)_{|(X=-2)} = \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi remarquer que si a est pôle simple de $\dfrac{P}{Q}$, alors le coefficient de $\dfrac{1}{(X-a)}$ dans la décomposition de F en éléments simples est égal à $\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Exemple 3.3. Soit $F(X) = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$. Les pôles de F sont les racines n-ièmes de l'unité, que nous noterons $\xi_0 = 1, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$. On a donc

$$F(X) = \sum \frac{\lambda_k}{X - \xi_k}.$$

Le coefficient λ_k est $\dfrac{\xi_k^{n-1}}{n\xi_k^{n-1}} = \dfrac{1}{n}$.

(2) **[Pôle double]** Dans ce cas, on a

$$F(X) = E(X) + \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + G$$

où α n'est pas pôle de G.

— Pour calculer λ_2, il suffit de multiplier par $(X-\alpha)^2$ puis d'évaluer en α.

— On évalue la fraction e plusieurs points (chacun donnant un système d'équations) et/ou on cherche la limite de $xF(x)$ quand x tend vers ∞.

Exemple 3.4.

$$F(X) = \frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$

Multipliant par $(X-1)^2$ on obtient $(X+1) = b + a(X-1)$ et l'évaluation en 1 fournit alors $b = 2$. Ensuite on peut remarquer que $xF(x)$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$ or $\dfrac{ax}{x-1} \to 1$ et $\dfrac{bx}{(x-1)^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$ ce qui donne $a = 1$.

Pôle d'ordre élevé Si $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^k}$ avec $d^0P < k$,

$$F(X) = \sum \frac{\lambda_j}{(X-a)^j}$$

et le développement limité de $(x-a)^k F(x)$ à l'ordre k au voisinage de a fournit les λ_j par unicité du $\mathrm{DL}_k(0)$.

Exemple 3.5. Soit $F(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^6} = \displaystyle\sum_1^6 \frac{\lambda_j}{(X-1)^j}$. On pose $t = x-1$ et

$$(x-1)^6 F(X) = (1+(t+1)^2) = 2+2t+t^2 = \lambda_1 t^6 + \lambda_2 t^5 + \lambda_3 t^4 + \lambda_4 t^3 + \lambda_5 t^2 \lambda_6 t + \lambda_7.$$

on a donc $\lambda_7 = 2$, $\lambda_6 = 2$, $\lambda_5 = 1$ les autres termes étant nuls.

Exemple 3.6. Décomposons $G = \dfrac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$ en éléments simples :

La partie polynomiale est nulle. La décomposition en éléments simples est de la forme $G = \dfrac{a}{(X-1)^3} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X-1} + \dfrac{d}{X+1}$.

— En multipliant les deux membres de l'égalité par $(X-1)^3$, en simplifiant puis en remplaçant X par 1, on obtient $a = \dfrac{3}{2}$.

— De même, en multipliant par $X+1$, en simplifiant puis en remplaçant X par -1, on obtient $d = \dfrac{1}{8}$.

— En multipliant par X et en regardant la limite quand $X \to +\infty$, on obtient $1 = c + d$. Donc $c = \dfrac{7}{8}$.

— En remplaçant X par 0, il vient $-1 = -a + b - c + d$. Donc $b = \dfrac{5}{4}$.

Ainsi :

$$G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)} = \frac{3}{2(X-1)^3} + \frac{5}{4(X-1)^2} + \frac{7}{8(X-1)} + \frac{1}{8(X+1)}$$

4. Décomposition sur $\mathbf{R}$

Théorème 4.1. *Soit* $F = \dfrac{P}{Q}$ *une fraction* irréductible *de partie entière* E*. On considère la décomposition de* Q *en facteurs irréductibles :*

$$Q(X) = C \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} \left(X^2+\beta_\ell X+\gamma_\ell\right)^{n_\ell}.$$

Alors, il existe des familles uniques de réels $(A_{k,i})$*,* $(B_{\ell,j})$ *et* $(C_{\ell,j})$ *telles que*

$$F = E(X) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j} + \sum_{\ell=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{B_{\ell,j}X + C_{\ell,j}}{(X^2+\beta_\ell X+\gamma_\ell)^j}.$$

C'est la décomposition de F en éléments simples.

On peut par exemple démontrer ce résultat en regroupant, dans la décomposition sur $\mathbf{C}$ les termes conjugués.

Exemple 4.1. **Cas d'un pôle unique** Si

$$F(X) = E(X) + \frac{P(X)}{(X-\alpha)^n}$$

avec $d^0P < n$, il existe donc des réels (a_k) tels que

$$F(X) = E(X) + \frac{a_1}{(X-\alpha)} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(X-\alpha)^n}.$$

Exemple 4.2. Décomposons $F(x) = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$. Le degré du numérateur étant 5 et celui du dénominateur 3, on commence par déterminer la partie entière de F par division euclidienne. On obtient alors $E = X^2 + 2X + 3$ et

$$F(X) = E(X) + \frac{A}{X} + \frac{B}{(X-1)} + \frac{C}{(X-1)^2}.$$

Pour obtenir A, on multiplie par X et on évalue en 0. On a donc $A = 1$. Pour déterminer C, on multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 ce qui donne $C = 2$. Comme il ne reste qu'un coefficient à calculer, on peut, par exemple évaluer en $X = -1$ pour déterminer B. On trouve alors $B = 3$.

Si F est une fraaction *paire* et si α est pôle d'ordre m de F, alors $-\alpha$ est aussi pôle d'ordre m de F. En comparant les décompositions de $F(X)$ et celle de $F(-X)$, l'unicité de ces décompositions permet d'obtenir des relations sur les coefficients.

Exemple 4.3. Soit à décomposer $F(X) = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$. On a :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

Comme F est *paire* on a

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{-cX+d}{X^2+1} + \frac{-eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition entraîne donc $a = -b$ et $c = d = 0$. A s'obtient par évaluation : $a = \frac{1}{8}$. On multiplie par $(X^2+1)^2$ et on évalue au point i pour obtenir $F = \frac{-1}{2}$. Enfin, en prenant $X = 0$ on obtient $d = -\frac{1}{4}$.

5. Exercices

Exercice 19 [Division suivant les puissances croissantes] Décomposer en éléments simples $\frac{X^4+5X^3+3X-2}{(X-1)^4}$ grâce au changement de variables $Y = X - 1$.

Exercice 20 Trouver des polynomes U et V tels que $U(X^2+X+1)+V(X^2+1) = 1$.
En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X}{(X^2+X+1)(X^2+1)}$

Exercice 21 Soit la fraction

$$F = \frac{1}{X(X+1)}$$

(1) Réaliser la décomposition en éléments simples de F.
(2) En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
(3) Procéder de même pour calculer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

6. Application au calcul de primitives

6.1. **Primitives de fractions rationnelles.** Bien des calculs de primitives peuvent se ramener à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle. C'est ce qui explique, en partie, l'intérêt de la décomposition en éléments simples. Les éléments simples de première espèce ne posent bien entendu aucun problème.

Pour les éléments de sonde espèce, on commence par écrire

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^2)^n} = \frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax+b)+\beta-\frac{\alpha b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^2)^n}.$$

Le premier terme est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ et ne pose donc pas de problème. Il nous reste donc à intégrer des éléments de la forme $\frac{A}{(ax^2+bx+c)^2)^n}$. Quitte à mettre le trinôme sous forme canonique et à faire un changement de variable, on a donc à trouver des primitives de $\frac{1}{(u^2+1)^n}$.

— Pour $n = 1$, on obtient $\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\, du = \arctan u + C$.

—

Pour $n > 1$, comme

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du = \int \frac{u^2+1}{(u^2+1)^n}\,du - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^n}\,du$$

on peut intégrer $\displaystyle\int \frac{2u(\frac{1}{2}u)}{(u^2+1)^n}\,du$ ce qui permet de terminer par récurrence.

Remarque 6.1. Il est important de *connaître la forme générale* de la décomposition en éléments simples sur **C** et sur **R** ainsi que son application aux calculs de primitives. Cependant, en général *rien ne dit* que l'on puisse effectivement décomposer le dénominateur sous forme de produit de facteurs irréductibles.

Noter aussi qu'un bon logiciel de calcul formel permet dans les bons cas de faire ces calculs.

6.2. **Primitives de fractions rationnelles en** cos **et** sin**.** Ce n'est pas toujours la méthode la plus rapide (loin de là) mais le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ permet de ramener le calcul d'un primitive d'une fraction en $\sin x$ et $\cos x$ à celui d'un fraction rationnelle en u : En effet,

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \text{ et } dx = 2\frac{1}{1+u^2}\,du.$$

Exemple 6.1. Calculons, par cette méthode $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$. Après changement de variable, on obtient

$$I = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \ln\left(1+t^2\right) = -\ln(\cos^2(x/2)) + C.$$

Chapitre 3
Espaces vectoriels

Dans ce qui suit $\mathbf{K}$ désigne soit le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels soit le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Dans le plan

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \; ; \; x \in \mathbf{R} \; , \; y \in \mathbf{R}\}$$

on définit de façon naturelle une addition de la façon suivante : Si $u = (x1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ on pose $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Les propriétés de l'addition des réels montrent que pour tout $u \in \mathbf{R}^2$ et tout $v \in \mathbf{R}^2$ on a $u + v = v + u$. De même, si u, v et w sont des éléments de $\mathbf{R}^2$ alors $(u + v) + w = u + (v + w)$ et, notant $-u = (-x_1, -y_1)$, on a, pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, $u - u = (0, 0)$. Si on note $0 = (0, 0)$, alors, pour tout $u \in \mathbf{R}^2$ on a $u + 0 = 0 + u = u$. On peut aussi définir une « multiplication »par les réels : $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $u \in \mathbf{R}^2$. On a de plus $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ et $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$. Les opérations définies sur les vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ en terminale ont les mêmes propriétés. Ce type d'opérations (addition et multiplication par des scalaires) sont très courantes en mathématiques : on peut les définir aussi pour les suites numériques, pour les fonctions définies sur un intervalle etc ... On est donc naturellement amené à définir une « structure »qui englobe ces objets a priori distincts.

1. Définitions

Définition 1.1. Un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ est un ensemble E muni d'une addition $+ : E \times E \to E$ et d'une « multiplication par les scalaires »$\cdot : \mathbf{K} \times E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) l'addition est associative : quels que soient u, v, w dans E, $u + (v + w) = (u + v) + w$.
(2) il existe un élément de E noté 0 tel que pour tout $u \in E$, $u + 0 = 0 + u = u$.
(3) pour tout $u \in E$ il existe un unique élément de E, noté $-u$ tel que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
(4) l'addition est commutative : quels que soient u, v dans E, $u + v = v + u$.
(5) pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$.
(6) quels que soient λ, μ dans $\mathbf{K}$ et $u \in E$, $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.
(7) quels que soient $\lambda \in \mathbf{K}$, $u \in E$ et $v \in E$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Exemples 1.1.

a) Sur $\mathbf{R}^n$ on définit une addition et une multiplication par les réels en posant

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

$\mathbf{R}^n$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel.

b) Soient I un ensemble (par exemple un intervalle de $\mathbf{R}$) et E un espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{F}(I,E)$ des applications de I dans E muni des opérations définies par $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ est un espace vectoriel.

c) Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. Si $f(t) = a + bt + ct^2$ et $g(t) = a' + b't + c't^2$, on peut définir $f+g \ : t \mapsto (a+a') + (b+b')t + (c+c')t^2$ et $\lambda f \ : t \mapsto \lambda a + (\lambda b)t + (\lambda c)t^2$. On vérifie alors que E muni de ces deux lois est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel.

Une partie F d'un espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* si, muni des lois induites par celles de E, c'est un espace vectoriel.

Proposition 1.1. *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et F une partie de E. Pour que F soit un sous-espace vectoriel il faut et il suffit que F soit non vide et que quels que soient $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ $\lambda u + \mu v$ appartienne à F.*

Exemples 1.2. a) Dans $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) \ x, y \text{ et } z \in \mathbf{R}\}$, l'ensemble

$$P = \{(x,y,0) \ ; x, y \in \mathbf{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel. C'est le plan d'équation $z = 0$.

b) Dans $\mathbf{R}^2$ la réunion de la droite D_1 d'équation $x - y = 0$ et de la droite D_2 d'équation $x + y = 0$ *n'est pas* un sous-espace vectoriel. En effet, $u = (1,1) \in D_1$, $v = (1,-1) \in D_2$ mais la somme $u + v$ n'appartient ni à D_1 ni à D_2.

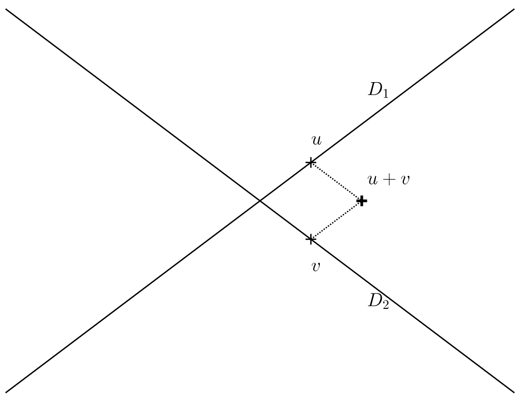


FIGURE 2. Réunion de deux droites

c) Dans $E = \mathbf{R}^2$, l'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \ \ xy = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, $0 = (0,0)$ n'appartient pas à Γ. On peut aussi remarquer que Γ n'est stable ni par multiplication par un scalaire ni par addition : $u = (1,1) \in \Gamma$ mais $2u = (2,2) \notin \Gamma$. De même $u = (1,1) \in \Gamma, v = (-1,-1) \in \Gamma$ mais $u + v \notin \Gamma$.

Exercice 22 Dans $\mathbf{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$?

Solution Vérifions que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
L'origine $(0, 0, 0, 0)$ est dans E,
Soient $\lambda \in \mathbf{R}$, $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $v' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in E$ alors $v + \lambda v' = (x_1 + \lambda x'_1, x_2 + \lambda x'_2, x_3 + \lambda x'_3, x_4 + \lambda x'_4)$ a des coordonnées qui vérifient l'équation proposée puisque

$$x_1 + \lambda x'_1 + x_2 + \lambda x'_2 + \cdots + x_4 + \lambda x'_4 = (x_1 + \cdots + x_4) + \lambda (x'_1 + \cdots x'_4) = 0$$

de sorte que $v + \lambda v' \in E$.

Définition 1.2. Soient E un espace vectoriel et $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\{u_i\}$ toute somme *finie* de la forme $\lambda_1 u_{i_1} + \cdots + \lambda_k u_{i_k}$ où les λ_j sont des scalaires.
Exemples 1.3.

(1) Si X est une partie d'un espace vectoriel E, l'ensemble $\mathrm{Vect}\,(X)$ des combinaisons linéaires des éléments de X est un sous-espace vectoriel de E ; on l'appelle le sous-espace *engendré* par X.

(2) Si $I \neq \emptyset$ est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $E = \mathbf{R}^n$, l'espace des fonctions continues (resp. dérivables) est un sous-espace vectoriel de l'espace de toute les applications de I dans E. En effet cet espace est non vide, la somme de fonctions continues (resp. dérivables) est continue (resp. dérivable) et le produit d'une fonction continue (resp. dérivable) par un scalaire est continue (resp. dérivable)

c) De même, si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{R}$ qui vérifient l'équation différentielle $ay" + by' + cy = 0$ (a, b et c constantes) est un espace vectoriel ; il est en effet facile de voir que c'est un sous-espace de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Définition 1.3. Dans un espace vectoriel E on dit qu'un système de vecteurs $(u_1, \ldots, u_k)$ est un *système lié* s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0.$$

Un système qui n'est pas lié est dit *libre*.

Pour que le système $(u_1, \ldots, u_k)$ soit libre, il faut et il suffit que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Exemples 1.4.

a) Dans $\mathbf{R}^3$, la famille (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -2)$ est liée. En effet, $e_3 = e_2 - e_1$.

b) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons la famille (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$. Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \qquad\qquad \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

de sorte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: la famille est donc libre. On remarquera au passage que l'étude de la liberté d'une famille de vecteurs, dans ce cas, se ramène à la résolution d'un système linéaire.

Définition 1.4. Soit E un espace vectoriel. Un système (u_i) de vecteurs est dit *générateur* si tout élément de E est combinaison linéaire des u_i.

On dit que (u_i) est une *base* de E si c'est un système libre et générateur.

Dire que (u_i) est un système générateur revient à dire que pour tout $u \in E$ il existe des scalaires λ_i tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux tels que $u = \sum_i \lambda_i u_i$. En d'autres termes, le système (u_i) est générateur si tout élément de E est une combinaison linéaire des u_i.

Dire que (u_i) est une base revient à dire que tout élément u de E peut s'écrire *de façon unique* comme combinaison linéaire des u_i. Les coefficients de cette combinaison linéaires sont les *coordonnées* de u dans la base (u_i).

Exemples 1.5. a) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Dans l'espace des fonctions dérivables de I dans $\mathbf{R}$ les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ et $x \mapsto e^{bx}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $a \neq b$. Il est clair que la condition $a \neq b$ est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si $\lambda e^{ax} + \mu e^{bx}$ est la fonction nulle, pour tout $x \in I$ on a $\lambda e^{ax} + \mu e^{bx} = 0$ soit encore $\lambda e^{(a-b)x} + \mu = 0$; la fonction $x \mapsto \lambda e^{(a-b)x}$ est donc constante sur I. En dérivant on en déduit $\lambda(a-b) = 0$. Si $b \neq a$ on a donc $\lambda = 0$ ce qui entraîne évidemment $\mu = 0$. Nous verrons plus loin que toute famille $\{e^{a_i x}\}$ est libre pourvu que les a_i soient tous distincts. Par contre aucune de ces familles n'est génératrice. Par exemple, $f : x \mapsto x^n$ n'est pas combinaison linéaire d'une famille d'exponentielles. Pour le voir il suffit de remarquer que la dérivée d'ordre $n+1$ de f est nulle alors que la dérivée d'ordre $n+1$ de $\sum \lambda_i e^{a_i x}$ est $\sum \lambda_i a_i^{n+1} e^{a_i x}$ de sorte que, si f était combinaison linéaire d'exponentielles distinctes, on devrait avoir $\lambda_i = 0$ sauf pour un indice i_0 au plus (si $a_{i_0} = 0$) ; la fonction f serait donc constante.

b) Dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ forment une base.

En effet, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, on a $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3) = (0,0,0)$ ce qui entraîne $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$. Ces vecteurs forment donc un système libre. Ils engendrent aussi $\mathbf{R}^3$ puisque $(x_1, x_2, x_3) = x_3 u_3 + (x_2 - x_3) u_2 + (x_1 - x_2) u_1$, ce qui montre que tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ est combinaison linéaire des u_i.

On peut montrer que tout espace vectoriel admet une base et que si un espace vectoriel admet une base finie, toute base de E est finie et a le même nombre d'éléments : c'est la *dimension* de E que nous noterons $\dim E$. Si E admet une base infinie, toute autre base est infinie ; on dit alors que E est de dimension infinie.

Proposition 1.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(u_1, \cdots u_p)$ une famille de vecteurs.*

(1) Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre, alors $p \leq n$

(2) Si $(u_1, \cdots u_p)$ est libre et si $p = n$, alors c'est une base de E.

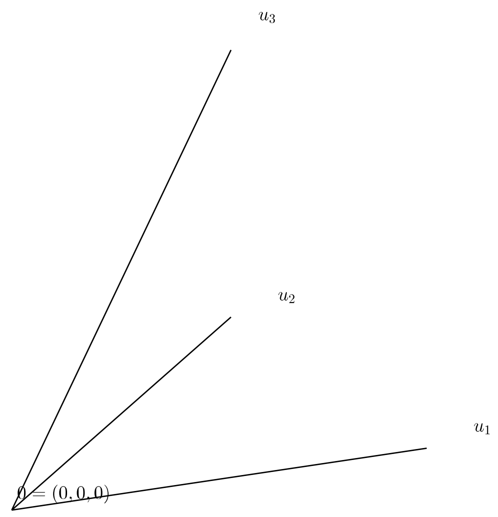


FIGURE 3. Une base de $\mathbf{R}^3$

Exemple 1.1. Remarquons que, dans $\mathbf{R}^2$, notant $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, le système (e_1, e_2) est libre. Il est de plus générateur puisque $(x, y) = xe_1 + ye_2$. $\mathbf{R}^2$ est donc de dimension 2. Si $u = (1, 1)$ et $v = (1, 2)$, (u, v) est un système libre. Comme il a deux éléments, c'est une base de $\mathbf{R}^2$.

2. Applications linéaires

Définition 2.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. Une application φ de E dans F est dite *linéaire* si pour tout $(u, v) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ on a

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

L'ensemble Ł(E, F) des application linéaires de E dans F admet une structure naturelle d'espace vectoriel les opérations étant définies par

$$\varphi + \psi : u \mapsto \varphi(u) + \psi(u), \quad \lambda \cdot \varphi : u \mapsto \lambda\varphi(u).$$

Si E est de dimension n et F de dimension p, alors Ł(E, F) est de dimension $n \times p$.
Exemples 2.1.

a) Soient a, b et c trois réels. Il est facile de vérifier que l'application f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f\ : u = (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ est *linéaire*.
b) Par contre l'application $f\ : u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto 2xy$ n'est pas linéaire. En effet, si $u = (x, y, z)$, on a $2u = (2x, 2y, 2z)$ et $f(2u) = 2(2x)(2y) \neq 2f(u) = 2(2xy)$.
c) Sur $\mathbf{R}^2$, l'application $(x, y) \mapsto x+y+1$ n'est pas linéaire puisque, si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, on a $f(u + v) = x + x' + y + y' + 1 \neq f(u) + f(v)$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et $u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de F, il existe une application linéaire φ unique telle que $\varphi(e_1) = u_1, \ldots, \varphi(e_n) = u_n$. Autrement dit une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E. Fixons nous une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F . $\varphi(e_i)$ s'écrit, d'une façon unique sous la forme $a_{1,i}f_1 + a_{2,i}f_2 + \cdots + a_{p,i}f_p$ où les $a_{j,i}$ sont des scalaires. D'après ce qui précède, l'application linéaire φ est entièrement déterminée par la donnée des $a_{j,i}$.

Rappelons qu'une application entre *ensembles* $\varphi : E \to F$ est

— *injective* si quels que soient x et x' dans E, $x \neq x'$ entraîne $\varphi(x) \neq \varphi(x')$.

— *surjective* si l'image de φ, *i.e.* l'ensemble $\{\varphi(x);\ x \in E\}$ est égal à F.

— it bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Dans le cas des applications linéaires (entre espaces vectoriels) on a les résultats suivants.

Définition 2.2. Soient E , F deux espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Le *noyau* de φ, noté $\ker\varphi$, est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle :

$$\ker\varphi = \{u \in E;\ \varphi(u) = 0\}.$$

Il est facile de voir que $\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E et que φ est injective si et seulement si $\ker\varphi = \{0\}$.

L'ensemble des images par φ des éléments de E est un sous-espace de F que l'on note $\operatorname{Im}\varphi$. La dimension de l'image de φ est le *rang* de φ.

Théorème 2.1. [**Théorème du rang**] *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors*

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim E.$$

En particulier, si E est de dimension finie et si φ est une application linéaire de E dans E, on voit que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) φ est injective

(2) φ est surjective

(3) φ est bijective.

Exemples 2.2. a) Considérons l'application φ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 3y - z, x + 2y + 2z).$$

Cette application est linéaire et (x, y, z) appartient à $\ker\varphi$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

La méthode du pivot de Gauss montre que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y - 3z = 0 \\ \quad - z = 0 \end{cases}$$

ce qui montre que $x = y = z = 0$. on a doonc $\ker\varphi = \{0\}$ et φ est bijective.

b) Si $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est définie par $\varphi(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 3y - z, 3x + 4y)$, un calcul analogue au précédent montre que $(x, y, z) \in \ker\varphi$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y - 3z = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$

soit encore $y = 3z$ et $x = -4z$. C'est donc la droite intersection de ces deux plans distincts. Tout élément du noyau s'écrit $(-4z, 3z, z) = z\,(-4, 3, 1)$. On a donc $\ker\varphi = \mathrm{Vect}\,((-4, 3, 1))$. L'image de φ est incluse dans le plan d'équation $z = x + y$ et, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 2$: $\mathrm{Im}\,\varphi$ est donc le plan d'équation $z = x + y$

2.1. **Détermination pratique du rang.** Si E est un espace vecoriel de dimension finie, pour déterminer le rang d'une application linéaire φ de E dans E il suffit de déterminer son noyau (et donc sa dimension).

Une méthode consiste alors à utiliser le pivot de Gauss.

Exemple 2.1. Soit φ ; $\mathbf{R}^n \to R^n$ une application linéaire et soit A sa matrice dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Le système $AX = 0$ est équivalent à un sytème échelonné de la forme

$$\begin{cases} \boxed{x_{n_1}} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \dots \quad \dots \qquad \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \boxed{x_{n_2}} + a_{2,n_2+1}x_{n_2+1} + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{x_{n_p}} + a_{p,n_p+1}x_{n_p+1} + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

avec $1 \le p \le m$ et $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_p \le n$ et, pour tout $k \ge n_p$ il. Le rang de A est alors égal au nombre de pivots.

2.2. **Sous-espaces supplémentaires.**

Définition 2.3. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces d'une espace vectoriel E. La *somme* des sous-espaces E_i est le sous-espace de E engendré par $\cup_i E_i$.

On note ce sous-espace $\sum E_i$: c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments des E_i. On a donc

$$\sum E_i = \{u_1 + \cdots + u_n \,;\ u_i \in E_i\}\,.$$

La somme $F = \sum_1^n E_i$ est dite *directe* si tout élément de F s'écrit de façon *unique* $u = u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_i \in E_i$. On note alors $F = E_1 \oplus E_2 \cdots \oplus E_n$.

Proposition 2.1. *Soient $E_1, \dots E_n$ des sous-espaces vectoriels de E Pour que la somme $\sum E_i$ soit directe il faut et il suffit que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait*

$$E_i \cap \left(\sum_{j \ne i} E_j\right) = \{0\}.$$

Définition 2.4. Soient F et G des sous-espaces d'un espace vectoriel E. On dit que F et G sont *supplémentaires* si

$$E = F \oplus G.$$

Exemples 2.3. (1) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les plans P_1 d'équation $z = 0$ et P_2 d'équation $x - z = 0$. Le vecteur $u = (1, 1, 1)$ n'appartient ni à P_1 ni à P_2. Cependant, $u = (0, 1, 0) + (1, 0, 1) \in P_1 + P_2$ mais on a aussi $u = (0, \frac{1}{2}, 0) + (1, \frac{1}{2}, 1)$ ce qui montre que la somme $P_1 + P_2$ n'est pas directe.

(2) Dans $E = \mathbf{R}^3$ considérons maintenant le plan P d'équation $z = 0$ et la droite D d'équations $x = 0\ ,\ y = 0$. On a

$$P = \{(x, y, 0)\ x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\} \quad \text{et } D = \{(0, 0, z)\ ;\ z \in \mathbf{R}\}.$$

Si $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, $u = (a, b, 0) + (0, 0, c) \in P + D$ et il est clair que cette écriture est unique. On a donc $P \oplus D = E$. En fait, on peut vérifier que si D est une droite quelconque non incluse dans P, on a encore $E = P \oplus D$.

Proposition 2.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est un système libre, alors $p \leq n$ et il existe $u_{p+1}, \ldots, u_n$ tels que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ soit une base de E.*

En particulier, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, il existe un sous-espace E_2 de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$.

Proposition 2.3. *Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces de E. On a :*

$$dim\ (E_1 + E_2) + dim\ (E_1 \cap E_2) = dim\ E_1 + dim\ E_2.$$

Chapitre 4

Calcul matriciel

1. Définitions

Une *matrice* à n lignes et p colonnes (nous dirons désormais "$n \times p$") est une famille $A = [a_{i,j}]$ de scalaires où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$. On convient d'écrire une telle matrice sous forme de tableau rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Si l'on se donne des bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ des espaces vectoriels E et F respectivement, toute application linéaire φ de E dans F détermine une matrice $p \times n$: c'est celle dont la colonne d'indice j est formée des coordonnées $a_{i,j}$ de $\varphi(e_j)$ dans la base $\{f_1, \ldots, f_p\}$.

Réciproquement *des bases de E et F étant données*, toute matrice $p \times n$ détermine une application linéaire unique de E dans F.

Définition 1.1. On appelle *transposée* d'une matrice A de type $n \times p$ la matrice $p \times n$, notée $A^t = [b_{i,j}]$, définie par $b_{i,j} = a_{j,i}$.

On a évidemment

$$\left(A^t\right)^t = A.$$

Si $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la *somme* $A + B$ par

$$A + B = [c_{i,j}], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Le produit d'une matrice $A = [a_{i,j}]$ de type $n \times p$ par un scalaire λ est la matrice

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{i,j}].$$

L'ensemble des matrices de type $n \times p$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension np. On remarquera que, des bases de E et F étant fixées, si φ et ψ sont les applications linéaires définies par A et B respectivement, $A + B$ n'est autre que la matrice de $\varphi + \psi$ dans les bases données et λA est celle de $\lambda \cdot \varphi$ dans ces bases.

On a de plus

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t \quad \text{et} \quad (A + B)^t = A^t + B^t.$$

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension n, p et q. Si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ sont deux applications linéaires, la composée $\psi \circ \varphi$ est encore une application linéaire. Si on se donne des bases de E, F et G on peut donc définir une opération sur les matrices qui correspond à la composition des applications linéaires : c'est le *produit* des matrices.

Si $A = [a_{i,j}]$ est une matrice $n \times p$ et $B = [b_{k,l}]$ une matrice $p' \times q$, A et B sont multipliables si et seulement si $p = p'$. Leur produit $C = AB$ est la matrice $n \times q$ définie par

$$C = [c_{i,j}], \quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum a_{i,k}b_{k,j};$$

utilisant les notations précédentes on a donc

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\ \cdots & \mathbf{c_{i,j}} & \cdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \mathbf{a_{i,1}} & \mathbf{a_{i,k}} & \mathbf{a_{i,p}} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \mathbf{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ \cdots & \cdots & \mathbf{b_{k,j}} & \cdots & \cdots \\ b_{n,1} & \cdots & \mathbf{b_{p,j}} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Le produit est associatif et distributif par rapport à l'addition : étant données trois matrices A, B et C on a

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) \\ A(B+C) &= AB + AC \\ (A+B)C &= AC + BC \end{aligned}$$

dès que les sommes et les produits écrits dans ces formules ont un sens. De plus, si A et B sont multipliables, B^t et A^t sont multipliables et

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t.$$

Remarque 1.1. Par contre, même si les produits AB et BA sont définis, en général $AB \neq BA$: le produit matriciel n'est pas commutatif.

2. matrices lignes, matrices colonnes

Une matrice Z de type $1 \times n$ est une matrice *ligne*; on se dispense alors d'expliciter l'indice de ligne et l'on écrit $Z = (z_1, \ldots, z_n)$.

La transposée d'une matrice ligne est une matrice *colonne i.e.* une matrice de type $n \times 1$; si X est une telle matrice on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Sous forme matricielle, le système d'équations

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ y_2 &= a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ y_p &= a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{aligned}$$

s'écrit, avec des notations évidentes, $Y = AX$ où Y est une matrice colonne à p lignes, A est une matrice $p \times n$ et X une matrice colonne à n lignes.

Étant donnée une matrice $A = [a_{i,j}]$ de type $n \times p$ on appelle i-ème vecteur colonne de A le vecteur $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$. Le vecteur $(a_{k,1}, \ldots, a_{k,p})$ est le k-ème vecteur ligne de A.

3. matrices carrées

On appelle matrice *carrée* toute matrice de type $n \times n$.

Deux matrices *carrées* $n \times n$ sont toujours multipliables.

La matrice unité $I = [\delta_i^j] = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $IA = AI = A$.

Si A est une matrice carrée l'associativité du produit montre que l'on peut définir A^n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par $A^0 = I$ et $A^{k+1} = A \cdot A^k$. Pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ on a

$$A^n A^m = A^{n+m} = A^m A^n.$$

En particulier, A commute avec toutes ses puissances.

Définition 3.1. Une matrice carrée A de type $n \times n$ est *inversible* s'il existe une matrice $(n \times n)$ B telle que

$$AB = BA = I.$$

Cette matrice B est alors unique et notée A^{-1}.

Si A est inversible, on peut définir A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et les formules précédentes sont encore valides.

A est inversible si et seulement si A^t est inversible. Dans ce cas l'inverse de A^t est la transposée de l'inverse $(A^{-1})^t$. Pour que A soit inversible, il faut et il suffit que l'application linéaire associée à A soit une bijection. Cela équivaut encore à dire que A et inversible si, et seulement si, les vecteurs colonnes de A forment un système libre de $\mathbf{K}^n$ (donc une base puisque A est $n \times n$).

Si $A \in M_n(\mathbf{K})$ et $B \in M_n(\mathbf{K})$ sont inversibles, AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

4. Autres matrices particulières

a) Une matrice A est dite *symétrique* si $A^t = A$.

b) A est dite *antisymétrique* si $A^t = -A$

c) A est *triangulaire* si A n'a que des zéros d'un côté de la diagonale ; si $a_{i,j} = 0$ pour $j \geq i$ on dit que A est triangulaire inférieure, si $a_{i,j} = 0$ pour $j \leq i$ on dit que A est triangulaire supérieure.

d) On appelle *matrice scalaire* toute matrice de la forme λI où λ est un scalaire *i.e.* une matrice dont tous les éléments diagonaux sont égaux et tous les éléments non diagonaux sont nuls.

5. changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire. Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases de E on appelle *matrice de passage de la base B à la base B'* la matrice P ayant pour vecteurs colonnes les vecteurs e'_i écrits dans la base B. Si $u = \sum_1^n x_i e_i = \sum_1^n x'_i e'_i$ on a

$$X = PX' \quad \text{soit encore} \quad X' = P^{-1} X.$$

Soit maintenant A la matrice de φ dans la base B et A' celle de φ dans la base B'. Notant Y la matrice colonne de $\varphi(u)$ dans la base B et Y' celle de ce vecteur dans la base B' on a $Y = AX$ et $Y' = A'X'$. On en déduit que $PA'P^{-1}X = AX$ pour tout X ; on a donc

$$A' = P^{-1}AP.$$

Un calcul simple montre alors que $A'^n = P^{-1}A^nP$.

Définition 5.1. Deux matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

6. Déterminant

Dans le plan orienté (au sens intuitif du terme, muni d'une base e_1, e_2) l'aire algébrique $V(x_1, x_2)$ d'un parallélograme de côtés x_1 et x_2 doit vérifier les propriétés suivantes :

(1) $V(x_1 + x_1', x_2) = V(x_1, x_2) + V(x_1', x_2)$ pour tout $(x_1, x_1', x_2) \in E^3$

(2) $V(x_1, x_2 + x_2') = V(x_1, x_2) + V(x_1, x_2')$ pour tout $(x_1, x_2, x_2') \in E^3$

(3) $V(ax_1, x_2) = aV(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$ et tout $a \in \mathbf{R}$.

(4) $V(x, x) = 0$.

(5) $V(e_1, e_2) = 1$

V est donc *linéaire* par rapport à chaque variable et $V(x_1, x_2) = -V(x_2, x_1)$.

On peut démontrer qu'il existe une unique application, notée det, de $M_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\det I = 1$

(2) det est linéaire par rapport aux colonnes

$$\det(V_1, \ldots, \lambda V_i + \mu W_i, \ldots, V_n) = \lambda \det(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_n) + \mu \det(V_1, \ldots, W_i, \ldots, V_n)$$

(3) det est *alternée i.e.* change de signe lorsque l'on permute deux colonnes :

$$\det(V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_j, \ldots, V_n) = -\det(V_1, \ldots, V_j, \ldots, V_i, \ldots, V_n).$$

On montre que $\det A = \det {}^t A$: ce que l'on vient de dire pour les colonnes est donc aussi vrai pour les lignes.

Théorème 6.1. *Si A et B sont deux matrices carrées $n \times n$, alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Il résulte de ce théorème et de la propriété (1) ci-dessus que si A est inversible, $\det A \neq 0$. Réciproquement on peut montrer que si $\det A \neq 0$, alors A est inversible.

Théorème 6.2. *Soit A une matrice $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

— *A est inversible.*

— $\det(A) \neq 0$.

Si A est donnée sous la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, nous noterons

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

6.1. **Calculs.** Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice d'ordre n. Si l'on se fixe une ligne i, on a

$$\det A = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j} \qquad (1)$$

où $D_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de la matrice A la i-ème ligne et la j-ème colonne. On dit que l'on a développé $\det A$ suivant la i-ème ligne. On a de même, pour tout j,

$$\det A = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j} \tag{2}$$

c'est le développement de $\det A$ suivant la j-ème colonne.

Si $A = (a)$ est une matrice 1×1, son déterminant est égal à a. Développant par rapport à la première ligne on a donc :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

De même :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Si A est une matrice triangulaire supérieure on voit en développant suivant la première colonne que $\det A$ est le produit des éléments diagonaux :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \star \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Le déterminant de la transposée d'une matrice étant égal au déterminant de la matrice, dans ce qui précède on peut remplacer triangulaire supérieure par triangulaire inférieure.

Il résulte de ce qui précède que l'on a tout intérêt à avoir, sur une même ligne ou une même colonne, le plus grand nombre possible de coefficients nuls. Or on ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne (resp. une ligne) V_i une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) : on s'efforcera donc, avant de développer un déterminant, d'utiliser ces opérations pour annuler le plus possible de coefficients d'une ligne ou d'une colonne.

Exemples 6.1. a) Pour calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ on peut soustraire la première colonne des deux autres ; on obtient alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

comme on le voit en développant le dernier déterminant par rapport à la première ligne.

b) Calculons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on soustrait 2 fois la première ligne de la seconde, 4 fois la première ligne de la troisième et la première ligne de la dernière on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -9 & -13 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Le même type d'opérations donne

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 128$$

la dernière égalité étant obtenue en développant le déterminant suivant la première colonne ou la dernière ligne.

6.2. **Calcul de A^{-1}.** Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Pour tout i et tout j de $\{1, 2, \cdots, n\}$ on note $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note $\mathrm{Com}(A) = [c_{i,j}] \in M_n(\mathbf{K})$ la matrice où

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}).$$

C'est la *comatrice* de A.

Théorème 6.3. *Si la matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible alors,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^t.$$

Remarque 6.1. Cette formule est avant tout un outil théorique.

Exercice 23 Les familles suivantes forment-elles des bases de $\mathbf{R}^3$?
$S_1 = \{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;
$S_2 = \{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a) ;
$S_3 = \{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ;
$S_4 = \{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Exercice 24 Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$.

Exercice 25 Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z = 0 \text{ et } 2x+y+z-t = 0\}$,
$G = \text{vect}\{(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\} \subset \mathbf{R}^4$.

(1) Calculer la dimension de F.

(2) Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.

Exercice 26 Soit $E = \mathbf{R}^3$. On note $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \ , u(e_2) = 3e_2 \ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

(1) Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il ÃÂªtre surjectif ? Pourquoi ?

(2) Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?

(3) Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \text{Im}\ u$.

Exercice 27 Soit $n \geq 1$, $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $\phi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.