Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes.

1. f est décroissante.
2. f n'est pas croissante.
3. f est injective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction injective.
4. f n'est pas surjective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction surjective.

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propriétés suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$
(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$
(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant M \implies \exists \ell \in \mathbb{R},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

1. Que signifie la condition (i) ? Ecrire la négation de (i).
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ donnés, simplifier l'expression $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. En déduire la signification de la condition (ii).
3. Montrer que (iii) est toujours vérifiée.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux deux propriétés suivantes.

(i) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.
(ii) Les ensembles A_n recouvrent $\mathbb{R}$, c'est à dire, $\cup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$.

1. Écrire ces deux propriétés à l'aide de symboles mathématiques, sans utiliser $\cup$ et $\cap$.
2. Montrer qu'on peut trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
3. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = (]x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
4. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1])$ remplisse les conditions ci-dessus.

Borne supérieure, borne inférieure.

Exercice 4. Dans les cas suivants, donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble M_i, et dire si cet ensemble admet un plus grand élément, un plus petit élément.

$$M_1 = \left\{ \frac{2n}{n^2+1}, n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad M_2 = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Exercice 5. Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.
2. Comparer $\sup(A \cap B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.
3. On note $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Comparer $\sup(A + B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 6. En utilisant la propriété de la borne supérieure, montrer que toute suite de réels, croissante et majorée, est convergente.

Exercice 7. Soit une application f *continue* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$

1. en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction auxiliaire bien choisie.
2. en utilisant les propriétés de la borne supérieure pour $X = \{x \in [0,1] : f(x) > x\}$.

Exercice 8. Soit une application f *croissante* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x\}$.

1. Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0,1]$. La suite de l'exercice a pour but de montrer que α est un point fixe de f.
2. Exploiter la croissance de f pour démontrer :
   (a) Si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.
   (b) Si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.
3. En appliquant le résultat (a) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$. En appliquant alors le (b) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \geqslant \alpha$, et conclure.

Exercice 9. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, monotone.

1. En utilisant la propriété de la borne supérieure, démontrer que f admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une limite à gauche et une limite à droite, que l'on notera respectivement $f(x-)$ et $f(x+)$.
2. En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, alors f est continue.
3. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision d'un intervalle $[a,b]$ (c'est-à-dire que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i < x_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$). Montrer que $|\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+) - f(x_i-)| \leqslant |f(b) - f(a)|$.
4. Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où f est discontinue est au plus dénombrable.

Rationnels et irrationnels

Exercice 10. (irrationnalité de e) Soient $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire l'existence d'un réel e tel que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers (premiers entre eux) conduit à une contradiction en choisissant une certaine valeur de n dans la double inégalité précédente. Conclure.

Exercice 11. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut 14.

Exercice 12. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si r et s sont rationnels alors $r + s$ est rationnel.
2. Si r et s sont rationnels alors rs est rationnel.
3. Si r est rationnel et x est irrationnel, alors $r + s$ est irrationnel.
4. Si r est rationnel et x est irrationnel alors rs est irrationnel.
5. Si r et s sont irrationnels alors $r + s$ est irrationnel.
6. Si r et s sont irrationnels alors rs est irrationnel.

Exercice 13. Montrer qu'entre deux réels il existe toujours un irrationnel et un rationnel.

Suites, suites extraites

Exercice 14. Montrer que toute suite convergente de nombres entiers est stationnaire.

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que le fait que (u_n) ne tende pas vers $+\infty$ est équivalent à la possibilité d'en extraire une sous-suite majorée.

Exercice 16. Soit (u_n) une suite réelle ne tendant pas vers 0. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) tels que, pour tout n, on ait $|u_{\varphi(n)}| > \epsilon$.

Exercice 17. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la sous-suite $(x_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge vers a, que la sous-suite $(x_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ converge vers b et que la sous-suite $(x_{3n})_{n\geqslant 0}$ converge vers c. Montrer que $a = b = c$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 18. On considère la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_n$?
2. Soient $n \geqslant m$ deux entiers naturels. Trouver une minoration de $|u_n - u_m|$ en fonction de n et m. Montrer que la suite $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy.
3. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$$

la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée *suite des moyennes de Cesàro* de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (c_n) converge aussi vers ℓ.
3. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
4. Soit (v_n) une suite de réels telle que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers ℓ.
   (a) Montrer que la suite (v_n/n) converge vers ℓ.
   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\big((v_1 + v_2 + \cdots + v_n)/n^2\big) = \ell/2$.
5. Soit (w_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite (w_{n+1}/w_n) converge vers $\ell > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{w_n})$ converge également vers ℓ.

Exercice 20. (théorème du point fixe de Picard). Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $I = [a, b]$, telle que $f(I) \subset I$. On suppose que f est k-contractante. C'est-à-dire qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in I$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

1. Montrer que f est continue, et admet un unique point fixe dans I.
2. On s'intéresse maintenant à la suite définie par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie.
   (b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, et qu'elle admet une limite $\ell \in I$
   (d) Montrer que ℓ est le point fixe de f.
   (e) Soit f une fonction dérivable telle que $f(I) \subset I$ et telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ avec $|f'(x)| < k$ pour tout x dans I. Montrer que f satisfait les hypothèses de l'exercice.

Exercice 21. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec $F(x) = \frac{1}{3}(x + x^3)$.

1. Représenter le graphe de F. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0, 1]) \subset [0, 1]$ et que $F([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.
2. On suppose $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que (u_n) est décroissante et donner sa limite.

Valeurs d'adhérence

Exercice 22. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. la suite (u_n) possède exactement k valeurs d'adhérence, pour $k = 0, 1, 2, 3$.
2. la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence, et est divergente.
3. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\mathbb{N}$.
4. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[0, 1]$.

Exercice 23. Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Les assertions suivantes sont-elles toujours vraies ?

1. u_n appartient à A à partir d'un certain rang.
2. Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Tout intervalle $[a, b]$ ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.
4. Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geqslant \sup A + \epsilon$.
5. Si A est borné, alors (u_n) est bornée.
6. Si $A = \emptyset$ et $u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
7. Si $v_n = u_{\phi(n)}$ est une suite extraite de u_n, et B l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, alors B est inclus dans A.
8. Si A ne possède qu'un seul élément et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est aussi A.

Exercice 24. Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit $a_n = \inf_{k\geqslant n} u_k$ et $b_n = \sup_{k\geqslant n} u_k$.

1. Montrer que a_n et b_n convergent. On note $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$ leurs limites respectives.
2. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de u_n alors $\underline{\lim}\, u_n \leqslant a \leqslant \overline{\lim}\, u_n$.
3. Montrer que $\underline{\lim}\, u_n$ (resp. $\overline{\lim}\, u_n$) est la plus petite (resp. grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.
4. Montrer que cette notion coïncide avec
$$\overline{\lim}\, u_n = \sup\{x \in \mathbb{R}; u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n\}.$$
5. Déterminer les $\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$ pour
$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad u_n = \begin{cases} (1 + \frac{1+(-1)^p}{p})^p & si\ n = 2p \\ (1 + \frac{1}{p})^p & si\ n = 2p+1 \end{cases}$$

Exercice 25. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle.

Exercice 26. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $\cos\big(f(n)\big)$. Montrer que V est exactement le segment $[-1, 1]$.

Exercice 27. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si la suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Continuité et droite réelle

Exercice 28. Un randonneur gravit une montagne. Sachant qu'il a monté les 1200m de dénivelé en 3h, montrer qu'il a durant son parcours monté 400m de dénivelé en 1h exactement.

Exercice 29. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *coercive* si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'une fonction continue et coercive sur $\mathbb{R}$ est minorée et atteint son minimum.

Exercice 30. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [0, 1]$. Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi(x) = \sup\,(f(t), t \in [0, x])$. Montrer que l'on définit ainsi une fonction φ sur I. Montrer que φ est croissante et continue.