Correction TD n° 6

Exercice 1. Rappels calcul du déterminant

Calculer les déterminants suivante (dont certains ont été vus en TD2) :

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & 5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0\\1 & 0 & -2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 0 & 4\\3 & -1 & 1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1+a & a & a\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

Le premier vaut -5 et le deuxième vaut -4 (matrices triangulaires). Pour le troisième on développe selon la deuxième colonne $= -(-1)\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix} = -2.$

Pour calculer le quatrième déterminant, on remplace la ligne L_1 par $L_1 + L_2 + L3$ et donc

$$\begin{vmatrix}1+a & a & a\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix}$$

Ensuite, on fait $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et on développe par rapport à la deuxième colonne. $\begin{vmatrix}1+a & a & a\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix}1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c\\b & 1+b & b\\c & c & 1+c\end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\b & 1 & b\\c & 0 & 1+c\end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

Notons D le dernier déterminant que l'on cherche à calculer. En enlevant la première ligne à toutes les autres, on trouve que :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

et donc D vaut -8.

Exercice 2. Vrai/faux

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
   Faux ! Si u est un vecteur propre d'un endomorphisme, alors λu l'est aussi pour tout λ scalaire non nul.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
   C'est vrai ! Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ et D^2 est diagonale.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
   Faux ! Considérer par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
   C'est vrai ! Le polynôme caractéristique de A est de degré impair, et tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec le calcul des limites en $\pm\infty$)

5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

   Faux ! Considérer par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Diagonalisation des matrices

1. Diagonaliser les matrices suivantes et donner pour chacune la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Commençons pas A**. Son polynôme caractéristique est** $\chi_A(\lambda) = A = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$**. En remplaçant la première colonne par la somme des trois colonnes, on trouve :** $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$**. Enfin, en faisant des opérations élémentaires sur les lignes 2 et 3 on trouve** $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **Il est scindé à racines simples, ce qui assure que** A **est diagonalisable (elle admet 3 valeurs propres distinctes et elle est de taille 3X3). Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résout** $AX = X$**, c'est-à-dire le système :**

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Un vecteur propre est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement** $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **et** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$**. La matrice** A **est donc semblable à** $diag(1, 2, -4)$**, la matrice de passage étant :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Le polynôme caractéristique de B **est :** $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ **qui admet** 1 **comme racine double. On ne peut pas donc conclure directement. Il faut déterminer d'abord les sous-espaces propres.**

La recherche du sous-espace propre associé à 2 amène au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **qui engendre donc ce sous-espace.**

L'étude du sous-espace propre associé à 1 conduit à l'équation :

$$x - y + z = 0$$

qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ **engendré par les vecteurs** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

On a donc $B = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par les éléments de la diagonale. La seule valeur propre de A est donc π. Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice inversible P tel que $A = P(\pi I_3)P_{-1}$. Comme I_3 commute avec toute les matrices carrées de taille 3, on aurait $A = (\pi I_3)PP_{-1} = \pi I_3$. Ce qui n'est pas le cas.

Exercice 4. Diagonalisation par polynôme minimal
Soit U la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
On vérifie facilement que :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc $U^2 = 2U + 3I_4$

2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé à racine simple : $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$. Ce polynôme est le polynôme minimal de U car $U + I_4$ et $U - 3I_4$ ne sont pas nulles. La matrice U est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 3.

3. Diagonaliser U.

Le sous-espace propre associé à -1 est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre associé à 3 est quant à lui engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Pour aller plus loin : calcul d'une puissance n-ième
Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = (x-2)(x-4)^2$. On ne peut pas donc conclure directement. Il faut déterminer d'abord les sous-espaces propres. Tout calcule fait on trouve : $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il vient que pour tout $n \in \ltimes$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Pour aller plus loin : trigonalisation

Soit A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.. A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^3$. La seule valeur propre de A est 1 et A n'est pas diagonalisable. L'espace propre associé à 1 est de dimension 2 et il est engendré par les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite un vecteur X_3 tel que $AX_3 = X_2 + X_3$. Ce qui donne $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Enfin $A = PBP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.