Année 2018-2019 Université Grenoble Alpes, Polytech', 3$^{\text{ième}}$ année

TD n° 4

1 Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 1.

1. $$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

   Une primitive est donc
   $$-\ln|x-1| + 2\ln|x-2|$$
   Et sur l'intervalle $]1,2[$ ça sera $-\ln(x-1) + 2\ln(2-x) + cste$.

2. $\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} + \frac{dx+e}{(1+x^2)^2}$. Pour calculer le coefficient a, on multiplie les deux membres par x, on trouve donc $\frac{1}{(1+x^2)^2} = a + \frac{x(bx+c)}{1+x^2} + \frac{x(dx+e)}{(1+x^2)^2}$. Ensuite, en évaluant en $x=0$ on trouve $a=1$. On procède de même pour les coefficients d et e en multipliant cette fois-ci par $(1+x^2)^2$ et en remplaçant x par i (qui est racine de X^2+1). En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve $d=-1$ et $e=0$. Enfin, pour les coefficients b et c on peut évaluer en deux points différents (on peut aussi exploiter la limite en $+\infty$ en multipliant les deux membres par x).
   On a alors $\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$ et les primitives sur $]0,+\infty[$ sont
   $$\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + cste$$

3. $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x^2+2x} = \frac{(x-1)(x+1)(x^3+3)}{2x(x+1)} = \frac{(x-1)(x^3+3)}{2x} = \frac{1}{2}(x^3-x^2+3) - \frac{3}{2x}$ et ses primitives sur $]-\infty;0[$ sont $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\ln|x| + C_1$ et sur $]0;+\infty[$ sont $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\ln|x| + C_2$ (La constante n'est pas la même selon que l'on est sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0,+\infty[$).

Exercice 2. IPP : intégration par parties

1. $\int xe^x dx = (x-1)e^x + cste$ **(IPP)**
2. $\int \ln x dx = x\ln(x) - x + cste$. **(IPP)**
3. $\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + cste$ **(IPP)**
4. $\int (\ln x)^2\, dx = x\left(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2\right) + cste$ **IPP + question 2**
5. $\int \cos x \exp x\, dx = \frac{1}{2}e^x(sin(x) + cos(x)$ **(IPP)**

Exercice 3.

1. $\int_0^\pi x\cos x\, dx = [x\sin(x) + \cos(x)]_0^\pi = -2.$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx = [\sin(x) - x\cos(x) - \cos(x)]_0^{\pi/2} = 2.$

3. $\displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^x\,dx = \left[(2-x+x^2)e^x\right]_0^1 = 2(e-1)$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2. À l'aide du changement de variable $u = e^x$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{2+\pi}{8}$ (changement de variable $x = \tan t$)

4. on note $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x\,dx$ et on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$.

   On a $dx = -\dfrac{1}{u^2}du$ et donc :

   $$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \int_2^{\frac{1}{2}} (1+u^2)\arctan(\frac{1}{u})\,(-\frac{1}{u^2})du = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1+u^2}{u^2}\arctan(\frac{1}{u})du$$

   $$= \int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2} - \arctan(u))du = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{u^2})du - I.$$ D'où $2I = \dfrac{\pi}{2}\left[-\dfrac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^2$ et donc $I = \dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 5.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{\arctan(x)}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{1-x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x})\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{4}$$

Exercice 6.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2 Intégrales généralisées

Exercice 7. On a $0 \leq \dfrac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \leq \dfrac{1}{1+e^x} \leq e^{-x}$, d'où la convergence de cette intégrale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx = \left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

(faire le changement de variable $u = e^x$ pour le calcul de la primitive ou voir tout simplement que

$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

qui est de la forme $\frac{f'}{f^2}$)

Exercice 8. Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$. Or cette fonction admet une limite quand x tend vers 0. L'intégrale converge donc.

Exercice 9.

1. En intégrant par partie, on obtient pour $A > 1$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt = cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

   Ensuite, il suffit de voir que $\frac{\cos(A)}{A} \to 0$ quand $A \to +\infty$ et $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$.

2. On a $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ puisque $|\sin(t)| \leq 1$. On en déduit que pour tout $A \geq 1$, $\int_1^A \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \int_1^A \frac{1-\cos(2t)}{t} dt$ et $\int_1^A \frac{1}{t} dt \to +\infty$ L'intégrale n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 10. On considère la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2}$.

1. $\lim_{t \to \pm\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. On conclut par comparaison avec les intégrales de Riemann.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
3. Intégration par parties. Le but de tout cela est de montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x}$

Exercice 11.

1. $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$ (intégration par parties).
2. $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2+1}$ (utiliser la formule d'Euler).
3. $\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt} dt = \frac{p}{p^2+1}$