TD n° 3

Exercice 1. Pour commencer
Résoudre les inégalités suivantes :

1. $|2x+1| < 1$;
2. $|x-1| < |x+1|$.

Exercice 2. Fonctions très usuelles

1. Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :
   (a) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et f a pour pente 2.
   (b) Le graphe de f passe par le point de coordonnées $(2;3)$ et on a $f'(-2) = 4$
   (c) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(2;1)$
2. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto 2|x-1| - |x+1|$

Exercice 3. Domaine de définition, parité
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et dire si la fonction est paire ou impaire :

1. $f \,:\, x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$. $D_f = \mathbb{R}$ **et** f **est paire.**
2. $f \,:\, x \mapsto \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$. $D_f = \mathbb{R}$ **et** f **est impaire.**
3. $f \,:\, x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $D_f =]-1;1[$ **et** f **est impaire (**$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$**).**
4. $f \,:\, x \mapsto x^3 + x + 1$; $D_f = \mathbb{R}$ **et** f **est ni paire ni impaire.**
5. $f \,:\, x \mapsto x^2 - x - 1$. $D_f = \mathbb{R}$ **et** f **est ni paire ni impaire.**

Exercice 4. Dérivation

1. Préciser le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f \,:\, x \mapsto \sqrt{1+(\cos(x))^2}$. $D_f = \mathbb{R}$ **et** $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)sin(x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}}$
   (b) $\dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$. $D_f = \mathbb{R}^*$ **et** $f'(x) = \dfrac{2e^{1/x}}{x^2(e^{1/x}-1)^2}$
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \cos(3x+1)$ $\quad f'(x) = -3\sin(3x+1)$
   (b) $x \mapsto \cos(x^2)$, $\quad f'(x) = -2x\sin(x^2)$
   (c) $x \mapsto (x^2+1)e^{2x}$, $\quad f'(x) = 2e^{2x}(x^2+x+1)$
   (d) $x \mapsto (x^2-2x+3)^5$, $\quad f'(x) = 10(x-1)(x^2-2x+3)^4$
   (e) $x \mapsto \sin^3(4x)$, $\quad f'(x) = 12\sin^2(4x)\cos(4x)$
   (f) $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$
   (g) $\sqrt{\ln(x)}$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$
   (h) $\exp(-x^2+2x-1)$, $\quad f'(x) = (-2x+2)\exp(-x^2+2x-1)$

(i) $\dfrac{1}{x^3-2x-3}$, $\qquad f'(x) = -\dfrac{3x^2-2}{(x^3-2x-3)^2}$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer, en fonction de f et f', la dérivée de $x \mapsto \sin\left(f(x)^2\right)$ et de $x \mapsto \sin\left(f(x^2)\right)$.
   Les fonctions $x \mapsto 2f'(x)f(x)\cos\left(f(x)^2\right)$ et $x \mapsto 2xf'(x)\cos\left(f(x^2)\right)$

Exercice 5. Étude de fonctions

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,\pi[$ on a $x\cos(x) - \sin(x) < 0$. **La fonction est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ d'où le résultat.**
2. Étudier le sens de variation de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0,\pi[$. **La dérivée de cette fonction est $x \mapsto \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ et on utilise la question précédente.**
3. Montrer que, pour $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ on a $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. **Utiliser la question précédente.**

Exercice 6. Étude de fonctions

Pour tout α réel, on définit sur $I =]0,+\infty[$ $f_\alpha \ : \ x \mapsto e^{\alpha \ln x}$.

1. Montrer que f_α est dérivable sur I et montrer que $f'_\alpha = \alpha f_{\alpha-1}$. **C'est une composée de deux fonctions dérivables sur $I =]0,+\infty[$. Ensuite, $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha \ln x}$.**
2. Si α et β sont deux réels, montrer que $f_\alpha \times f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. **il n'y a qu'à!!!**

On convient de noter $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Étudier $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha > 0$ puis pour $\alpha < 0$. **Croissante pour $\alpha > 0$ et décroissante pour $\alpha < 0$**

Exercice 7. Théorèmes classiques de l'analyse

1. Montrer que l'équation $x\ln(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution. **TVI + strict monotonie sur l'intervalle $]1/e;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x - 1$ ou faire simplement un tableau de variation.**
2. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution. **idem**
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2+1)\sin(x)$ et en déduire que l'équation
   $$\left(x^2+1\right)\cos x + 2x\sin x = 0$$
   admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$. **application directe du théorème de Rolle.**
4. On considère un cycliste qui parcourt 90 km en 4 heures. on suppose que la distance $d(t)$ parcourue entre l'instant 0 et le temps t est une fonction continue de t. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45 km.
   On considère la fonction qui $g : t \mapsto d(t+2) - d(t)$. Le but est de montrer qu'il existe t_0 dans $[0;2]$ tel que $g(t_0) = 45$. On suppose la fonction d continue. On a alors $g(0) + g(2) = d(2) - d(0) + d(4) - d(2) = d(4) - d(0) = 90$. Cela veut dire que forcément $g(0)$ et $g(2)$ sont de part et d'autre de 45. D'après le TVI, il existe $t_0 \in [0;2]$ tel que $g(t_0) = 45$. D'où le résultat.
5. Montrer que pour tout a et tout b réels, on a $|\cos a - \cos b| \leq |b-a|$. **Théorème des accroissements finis**.

Exercice 8. Développements limités

1. Calculer les DL des fonctions suivantes, aux points et à l'ordre indiqués :

(a) $\dfrac{e^x - 1}{cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3.

En 0 on a : $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$. On pose $U = \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$. On a alors

$$\frac{e^x - 1}{cos(x)} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{1-U}\right) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)(1 - U + o(U))$$

Le terme U^2 est un $o(x^4)$ donc négligeable à l'ordre 3. D'où :

$$\frac{e^x - 1}{cos(x)} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

(b) $e^x \ln x$ en 2 à l'ordre 2

On utilise la formule de Taylor-Young

$$e^x \ln x = e^2 \ln(2) + (x-2)(e^2 \ln(2) + \frac{e^2}{2}) + \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{e^2 \ln(2)}{2}\right)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$$

(c) $\sqrt{1 + \cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3

$$\sqrt{1+\cos(x)} = \left(2 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,(1 - U + o(U))^{\frac{1}{2}}\ ;\ \text{où } U = \frac{x^2}{4} + o(x^3) \longrightarrow_{x\to 0} 0$$

et donc :

$$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2} - \frac{x^2\sqrt{2}}{8} + o(x^3)$$

(d) $\tan(x)$ en π à l'ordre 3

$$\tan(x) = (x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3} + o((x-\pi)^3)$$

(e) $\sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3

$$\sin(\ln(1+x))) = \sin(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = \sin(U) \text{ où } U = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \longrightarrow_{x\to 0} 0$$

et

$$\sin(U) = U - \frac{U^3}{6} + o(U^3)$$

On obtient après calculs :

$$\sin(\ln(1+x))) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(f) $\sqrt{x}$ en 1 à l'ordre 3

En 1

$$\sqrt{x} = .1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}$
Il suffit de faire un $DL_4(0)$ de $1-\cos(x)+\ln(\cos(x))$. On trouve tout calcul fait $1-\cos(x)+\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$. La limite vaut donc $-\frac{1}{8}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x})$
La limite est $\frac{1}{2}$ (faire d'abord un développement limité à l'ordre 2 de e^x)

Exercice 9. (Pour aller plus loin)

Soit f la fonction définie par $x^3\sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
   Il suffit de voir que $f(x)=o(x^2)$ au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})=0$.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?
   Le calcul de la dérivée donne $\frac{f'(x)}{x} = 3x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})$ qui n'admet pas de limite en 0.