Exercice 1. Résolution de systèmes linéaires dans $\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-3y+6z+2t=5 \\ y-2z+t=1 \\ z-3t=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+5z=-1 \\ 7x+8y+9z=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2t=1 \\ 5x+4y+z+3t=14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z+t=10 \\ x-y+z+t=6 \\ x+y-z+t=4 \\ x+y+z-t=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+4y-4z+t=0 \\ 3x+6y+z-2t=-7 \\ -x+y+2z+3t=4 \\ x+y-4z+t=2 \end{cases}$

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires dans $\mathbb{C}$.

Résoudre les systèmes suivants avec x, y, z dans $\mathbb{C}$:

$$a)\ \begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+iy+2z=0 \\ ix+3z=0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} -2x+y=-4+i \\ x+iz=2-i \\ x-y-iz=2 \end{cases}$$

Exercice 3. produit matriciel

1. Calculer les produits de matrices indiqués, lorsqu'ils sont définis.
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Ce produit n'est pas défini.**
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$
2. Soient deux matrices,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = A, B^2 = I_2, A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$
   $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. calcul de l'inverse d'une matrice

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. calcul astucieux de l'inverse d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

$A^3 - A = 4I_3 \Longleftrightarrow A(A^2 - I_3) = 4I_3$. **L'inverse de** A **est donc** $\frac{1}{4}(A^2 - I_3)$

Exercice 6. Sous-espaces vectoriels

1. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel :
   (a) $A_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. **Oui, c'est l'hyperplan d'équation** $z = 0$
   (b) $A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. **, Oui c'est le noyau d'une forme linéaire.**
   (c) $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. **Non il ne contient pas le vecteur nul.**
   (d) $A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$. **Non il n'est pas stable par combinaison linéaire.**
   (e) $A_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x = 2y + 5z\}$. **Oui**
   (f) $A_6 = \mathbb{Q}^3$
2. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (a) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. **Oui**
   (b) L'ensemble des fonctions paires. **, Oui**
   (c) L'ensemble des fonctions impaires.**, Oui**
   (d) L'ensemble des fonctions croissantes. **, Non. Si on multiplie une fonction croissante par -1 elle n'est plus croissante !**
   (e) L'ensemble des fonctions monotones. **Non, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas forcément monotone**
   (f) L'ensemble des fonctions positives. **, Non. Si on multiplie une fonction positive par -1 elle devient négative**
   (g) L'ensemble des fonctions bornées. **Oui**
   (h) L'ensemble des fonctions dérivables. **Oui**
   (i) L'ensemble des fonctions nulles en 1. **Oui**
   (j) L'ensemble des fonctions égales à 1 en 0. **Non, cet ensemble ne contient pas la fonction nulle**
   (k) L'ensemble $\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 1) = 2f(x)\}$. **, Oui**
   (l) L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : f'' = 0\}$. **, Oui**

(m) L'ensemble des fonctions 2π-périodiques. **, Oui**

Exercice 7. Calculs de déterminants.

Calculer les déterminants suivants et factoriser quand c'est possible :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \text{ on développe par rapport à la première colonne par exemple}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 + 32 - 21 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abc. \text{ On développe par rapport à la première colonne.}$$

Pour calculer le dernier déterminant, on remplace la ligne L_1 par L_1+L_2+L3 et donc $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

. Ensuite, on fait $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et on développe par rapport à la deuxième colonne. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & b \\ c & 0 & 1+c \end{vmatrix}$$

.

Exercice 8. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. **Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur** $u = (1,1,1)$**.**

Il suffit de prouver que c'est une famille libre ou il suffit de voir que le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **est non nul. En sommant les trois vecteurs on trouve le vecteur de coordonnées** $(2,2,2)$ **et donc les coordonnes du vecteur** u **dans cette base sont** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Exercice 9. Indiquer si les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres et/ou génératrices. Lesquelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$?

(a) $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$, **c'est une base de** $\mathbb{R}^3$

(b) $((1,1,1),(0,0,0))$, **Ni libre ; ni génératrice**

(c) $((1,1,1),(1,2,1),(0,1,0))$, **c'est une famille liée, le deuxième vecteur est la somme des deux autres**

(d) $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1))$. **Elle ne peut pas être libre car elle contient 4 vecteurs et on est en dimension 3. Par contre elle est génératrice. Les 3 premiers vecteurs forment une base comme on l'a prouvé dans l'exercice précédent.**