Exercice 2 — Dilatation d'un compact.

1. $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élément de compact $E\times E$, on peut alors extraire d'elle une suite $((a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $E\times E$.

2. La suite $((a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, d'où $\forall \varepsilon>0$ il existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. si $k\geq n$: $d_{max}\left((a_{\varphi(k+1)}, b_{\varphi(k+1)}); (a_{\varphi(k)}, b_{\varphi(k)})\right)<\frac{\varepsilon}{2}$

d'où si $k\geq n$: $d(a_{\varphi(k+1)}, a_{\varphi(k)})<\frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\varphi(k+1)}, b_{\varphi(k)})<\frac{\varepsilon}{2}$

et, en utilisons la propriété (P) ; si $k\geq n$:

$$d(a_{\varphi(k+1)-\varphi(k)}, a)<\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d(b_{\varphi(k+1)-\varphi(k)}, b)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Comme $\varphi(n+1)-\varphi(n)\geq 1$ alors par la propriété (P)

$$d(a,b)\leq d(a_1,b_1)\leq d(a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, b_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}) \text{ et, par}$$

l'inégalité triangulaire :

$$d(a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, b_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})\leq d(a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, a)+d(a,b)+d(b, b_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$$
$$< d(a,b)+\varepsilon$$

4. (a) par 3. on a $\forall\varepsilon>0$. $d(a,b)\leq d(f(a), f(b))<d(a,b)+\varepsilon$

d'où $d(f(a), f(b))= d(a,b)$.

(b) par 2. $d(a, a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})<\frac{\varepsilon}{2}$ et comme $a_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\in f(E)$, alors $f(E)$ est dense dans E i.e. $E=\overline{f(E)}$.

D'autre part f continue (car isométrie) et E compact, d'où $f(E)$ est compact. d'où $\overline{f(E)}=f(E)$

Donc f est une isométrie de E sur lui-même.

Exercice 3 - Jauge d'un convexe.

1. $\overline{B}(0,1)$ est compact (car partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^n$)

- soit $x, y \in \overline{B}(0,1)$, on a $\forall t \in [0,1]$:
$\|tx+(1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1$ d'où $tx+(1-t)y \in \overline{B}(0,1)$

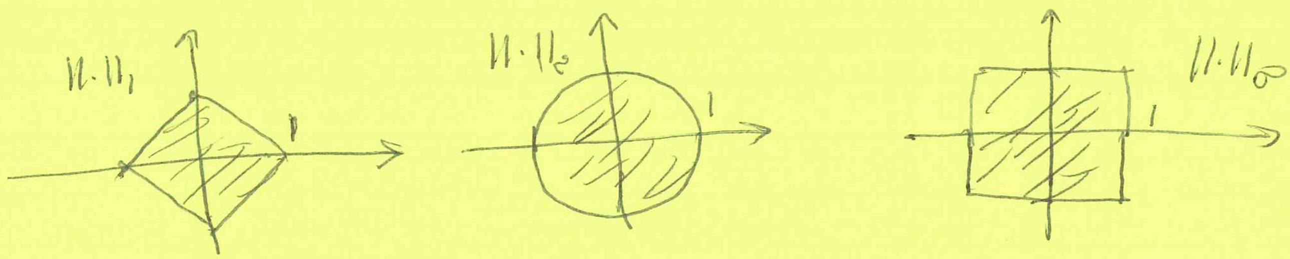
Donc $\overline{B}(0,1)$ est convexe.

- $\forall x \in \overline{B}(0,1)$: $\|-x\| = \|x\| \leq 1$ d'où $-x \in \overline{B}(0,1)$.

Donc $\overline{B}(0,1)$ est symétrique par rapport à l'origine.

Enfin $B(0,1)$ est un ouvert non vide et inclus dans $\overline{B}(0,1)$

2.



3. $0.x = 0 \in K$ d'où $0 \in I_x$ et donc $I_x \neq \emptyset$.

soit $\lambda \in I_x$ alors $\forall t \in [0,1]$: $t\lambda x = (1-t)0 + t.(\lambda x) \in K$

d'où $t\lambda \in I_x$ et donc $[0,\lambda] \subset I_x$ et I_x est un intervalle de $\mathbb{R}$.

4. $0 \in \mathring{K}$ alors il $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(0,\varepsilon) \subset K$ d'où si $x \neq 0$

$\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|} \subset K$ d'où $\frac{\varepsilon}{2\|x\|} \in I_x$ et $\sup(I_x) > 0$.

D'autre part, il est évident que $I_0 = \mathbb{R}_+$ non bornée

5. $I_0 = \mathbb{R}_+$ d'où $J(0) = 0$

6. ⓐ K compact et il est donc bornée donc il $\exists A \in \mathbb{R}$ t.q
$\forall x \in K : \|x\| \leq A$ d'où $(A+1)\frac{x}{\|x\|} \notin K$ puis $I_x \subset \left[0, \frac{A+1}{\|x\|}\right[$

d'où par ④ $\sup(I_x) > 0$ et, par conséquence $J(x) > 0$.

ⓑ soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de I_x qui converge vers $\sup(I_x)$, alors $\|\sup(I_x)x - \lambda_n . x\| = (\sup(I_x) - \lambda_n)\|x\|$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et comme K compact alors $\sup(I_x).x = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n x) \in K$ puis $\sup(I_x) \in I_x$

ⓒ $(\lambda \in I_x) \Leftrightarrow (\lambda x \in K) \Leftrightarrow (-\lambda x \in K) \Leftrightarrow \lambda \in I_{-x}$

d'où $I_{-x} = I_x$ puis $J(-x) = \frac{1}{\sup(I_{-x})} = \frac{1}{\sup(I_x)} = J(x)$

ⓓ $(\lambda \in I_{\alpha x}) \Leftrightarrow (\lambda\alpha x \in K) \Leftrightarrow (\lambda\alpha \in I_x)$

d'où $\sup(I_x) = \alpha \sup(I_{\alpha x})$ puis $J(\alpha x) = \alpha J(x)$

7. pour $x \neq 0$ on pose $x_0 = \frac{x}{J(x)} = \sup(I_x) \cdot x$.

on a alors $x = J(x) \cdot x_0$ avec $x_0 \in K$

en plus $0 = J(0) \cdot 0$

8. K convexe et $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \in \mathbb{R}_+$ avec $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$ d'où

$\frac{a}{a+b} x_0 + \frac{b}{a+b} y_0 \in K$.

9. $\begin{cases} x = J(x) \cdot x_0 = a x_0 \\ \text{et } y = J(y) \cdot y_0 = b y_0 \end{cases}$ avec $x_0, y_0 \in K$.

$\frac{1}{a+b}(x+y) = \frac{a}{a+b} x_0 + \frac{b}{a+b} y_0 \in K$ d'où $\frac{1}{a+b} \in I_{x+y}$

donc $\frac{1}{a+b} \leq \sup(I_{x+y}) = \frac{1}{J(x+y)}$ d'où

$J(x+y) \leq a+b = J(x) + J(y)$

10. ⓐ - on a $(J(x) = 0) \iff (x = 0)$

- par ⑨ $J(x+y) \leq J(x) + J(y)$

- par (6.b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $J(\alpha x) = J(|\alpha| x)$

$= |\alpha| J(x)$ par (6.d)

Donc J est une norme sur $\mathbb{R}^4$.

ⓑ si $J(x) \in]0,1]$ alors $\sup(I_x) \geq 1$ puis $1 \in I_x$ et $x = 1 \cdot x \in K$.

et si $J(x) = 0$ alors $x = 0 \in K$

Inversement. si $x \in K$ alors $1 \in I_x$ d'où $J(x) \leq 1$.

Donc K est la boule unité fermé pour la norme J.

11. soit $a \in \mathring{K}$ alors $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(a, \varepsilon) > 0$.

soit $x \in B(0, \varepsilon)$ alors $a + x \in K$ et $a - x \in K$

et, par symetrie ~~$a-x \in K$~~ $-a + x \in K$.

et comme K est convexe alors $x = \frac{1}{2}(a+x) + \frac{1}{2}(-a+x) \in K$

Donc $B(0, \varepsilon) \subset K$ et $0 \in \mathring{K}$.