TD3 – Transformée de Fourier et Transformée de Lapace

Exercice 1 – Calculs de TF et TL[1] (I)
Calculer, quand cela est possible, les transformées de Fourier et/ou de Laplace des fonctions suivantes définies, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$f_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [1,\, 5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \qquad f_3(t) = 1 \qquad f_4(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

$$f_5(t) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad f_6(t) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2,\, \pi/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_7(t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,\, 1/2] \\ 1-x & \text{si } x \in [1/2,\, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 – Encore des calculs de TL
Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, nullee sur $]-\infty, 0[$ puis 2π-périodiques sur $[0, +\infty[$ et définies, sur $[0\,, 2\pi]$, par

$$f_1(t) = t \qquad f_2(t) = \sin(\alpha t) \qquad f_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,\, \pi] \\ 0 & \text{si } t \in]\pi,\, 2\pi] \end{cases} \qquad f_4(t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,\, \pi] \\ \pi - x & \text{si } x \in]\pi,\, 2\pi]. \end{cases}$$

Exercice 3 – Propriétés de la TF (I)
Soit f une fonction intégrable.

1) Montrer que $\mathscr{F}(f)$ est bornée et donnée un majorant de $|\mathscr{F}(f)|$.

2) Montrer que si f est dérivable, alors[2]

$$\mathscr{F}(f)(\xi) \underset{\xi \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}(f)(\xi) \underset{\xi \to -\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3) que peut on dire du comportement de f en $+\infty$ si f est $\mathscr{C}^n$ avec $n \geq 1$.

Exercice 4 – Il n'y a pas d'unité pour la convolution dans les fonctions intégrables
Soit f une fonction intégrable. On suppose que pour toute fonction g intégrable, $f * g = g$.

1) Quelle est la TF de la distribution δ_0.

2) En déduire qu'il n'existe pas de fonction intégrable g telle que $T_g = \delta_0$.[3]

3) Calculer la TF de f.[4]

4) En déduire une contradiction.

1. On rappel qu'ici TF correspond à transformée de Fourier et TL à transformée de Laplace.
2. Comme vu en cours, ceci est en fait vrai pour n'importe quel fonction f intégrable.
3. Indice : on pourra regarder la limite de $\mathscr{F}(f)$ en l'infini.
4. Indice : on pourra utiliser le fait que $f * g = g$ pour une fonction g bien choisie.

Exercice 5 – Symétries de la TF et la TL (I)
Soit f une fonction intégrable et à valeurs réelles

1) On suppose que f est paire, que peut-on dire de la parité de $\mathscr{F}(f)$?
Est-ce que $\mathscr{F}(f)$ est à valeurs réelles ? imaginaires pures ?

2) On suppose que f est impaire, que peut-on dire de la parité de $\mathscr{F}(f)$?
Est-ce que $\mathscr{F}(f)$ est à valeurs réelles ? imaginaires pures ?

Soit f une fonction nulle sur $]-\infty, 0]$ et à valeurs réelles.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathscr{L}(f)(x) \in \mathbb{R}$.

4) Comparer, pour tout $p \in \mathbb{C}$, $\overline{\mathscr{L}(f)(p)}$ et $\mathscr{L}(f)(\overline{p})$.

Exercice 6 – La résolution d'une équation linéaire d'ordre 1 (I)
Soient f une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation suivante :

$$y'(t) + \alpha y(t) = f(t) \tag{E1}$$

On cherche la solution y de (E1) telle que $y(0) = 0$.

1) Donner les équations algébriques obtenues après avoir appliqué la TL.

2) Qu'elle serait la solution si on mettait une distribution de Dirac à la place de f ? [5]

3) Déterminer y dans les cas suivante

(i) f est la fonction de Heaviside,

(ii) f est une rampe (i.e. f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $f(t) = t$ pour tout $t > 0$).

(iii) $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}$ si $t > 0$ on discutera en fonction de la valeur de β.

Exercice 7 – La résolution d'une équation linéaire d'ordre 2 (I)
Soient f une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation suivante :

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t). \tag{E2}$$

On cherche la solution y de (E2) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1) Donner les équations algébriques obtenues après avoir appliqué la TL.

2) Qu'elle serait la solution si on mettait une distribution de Dirac à la place de f ? [5]

3) Déterminer y dans les cas suivante

(i) f est la fonction de Heaviside,

(ii) f est une rampe (i.e. f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $f(t) = t$ pour tout $t > 0$).

(iii) $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}$ si $t > 0$ on discutera en fonction de la valeur de γ.

5. On parle de *solution impulsionnelle*.