TD2 – Distributions et convolutions

Exercice 1 – Des exemples de distributions (I)
Soit T_1 la distribution définie par, pour $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \varphi(-1/2) - \varphi(1/2).$$

1) Exprimer T_1 comme combinaison linéaire de distributions classiques (distributions régulières, Dirac, ...).

2) Quel est la dérivée de T_1 ?

3) Trouver une distribution T telle que $T' = T_1$.

Soit T_2 la distribution définie par, pour $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

4) Exprimer T_2 comme combinaison linéaire de distributions classiques (distributions régulières, Dirac, ...).

5) Quel est la dérivée de T_2 ?

6) Trouver une distribution T telle que $T' = T_2$.

7) Même question avec $\sin(x)$ à la place de $\cos(x)$ dans l'intégrale.

Soit T_3 la distribution définie par, pour $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \varphi(0) + \varphi(1) + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

8) Exprimer T_3 comme combinaison linéaire de distributions classiques (distributions régulières, Dirac, ...).

9) Quel est la dérivée de T_3 ?

10) Trouver une distribution T telle que $T' = T_3$.

Exercice 2 – Multiplication d'une distribution avec une fonction $\mathscr{C}^\infty$
Soit T une distribution et soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. Montrer que $f\varphi \in \mathscr{D}$.

2) Montrer que l'application

$$\varphi \in \mathscr{D} \longmapsto \langle T, f\varphi \rangle$$

est linéaire.

On admet que ceci définie une distribution que l'on notera fT.
Soit g une fonction localement intégrable.

3) Montrer que $fT_g = T_{fg}$.

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction identité (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$).

4) Montrer que $f\delta_0 = 0$ (ce qui s'écrit, par abus de notation, $x\delta_0 = 0$).

5) Calculer la distribution $f\delta_0'$ (plus communément noté $x\delta_0'$).

6) Vérifier, plus généralement que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f\delta_0^{(m)} = \delta_0^{(m-1)}$.

Exercice 3 – la distribution valeur principale de $1/x$ (D) [1]

Soit $f \in \mathscr{D}$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et admet une limite quand $\varepsilon \to 0$.

2) Montrer que l'application

$$\varphi \in \mathscr{D} \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right).$$

est linéaire.

On admet que ceci définie une distribution que l'on note v.p. $\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction identité (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$). Montrer que, fv.p. $\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (ce qui s'écrit, par abus de notation, xv.p. $\left(\frac{1}{x}\right) = 1$).

2) Montrer que $g : x \mapsto \ln|x|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $g' = $ v.p. $\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Montrer qu'il n'existe pas de fonction localement intégrable h telle que $T_h = $ v.p. $\left(\frac{1}{x}\right)$ (i.e. v.p. $\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas une distribution régulière).

Exercice 4 – convolution de deux fonctions portes (I)

Soit P_1 la fonction porte sur l'intervalle $[-2, 0]$ et soit P_2 la fonction porte sur $[0\,, 4]$.

1) Tracer les graphes de P_1 et celui de P_2.

2) Tracer le graphe de $P_1 * P_2$.

Exercice 5 – Convolution de la fonction porte et de la fonction rampe

soit P la fonction porte sur l'intervalle $[-1/2,\ 1/2]$ et soit f la fonction rampe définie par, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ t & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1) Determiner la valeur de $(P * f)\,(x)$ pour $x \leq -1/2$.

2) Determiner la valeur de $(P * f)\,(x)$ pour $x \in [-1/2,\ 1/2]$.

3) Determiner la valeur de $(P * f)\,(x)$ pour $x \geq 1/2$.

4) Tracer le graphe de $P * f$.

1. les exercices notés avec un (D) sont difficile et pas indispensable pour la compréhension du cours