UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES 2017-2018

Enseignant : Rémi Molinier MAT402
remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

Devoir Maison 1 : Suites de fonctions

Exercices de niveau 0

Exercice 1

Soit $a > 0$, on définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;1]$ par $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0\,;1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément vers une fonction f dérivable que l'on déterminera.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est dérivable et que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g.

3. Comparer f' et g. Que pouvez-vous en déduire sur la convergence uniforme de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f.

1. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est uniformément continue, alors f est aussi uniformément continue.

2. Qu'en est-il si la convergence n'est pas uniforme ?

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est décroissante et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

1. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Qu'en est-il si I n'est pas borné ?

Exercices de niveau 1

Exercice 5

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge vers f.

1. Montrer que si la convergence est uniforme alors f est aussi une fonction polynômiale.[1]

2. Qu'en est-il si la convergence n'est pas uniforme ?

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ par

$$u_n(x) = n\left(f(x+1/n) - f(x)\right).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement et identifier la limite.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle borné.

Exercices de niveau 2

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0\,;1]$ par $u_0(x) = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n(x) = 1 + \int_0^x u_{n-1}(t - t^2)dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément vers une fonction que l'on notera u.

2. Vérifier que u est non identiquement nulle et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$u'(x) = u(x - x^2), \qquad x \in [0\,;1].$$

Exercice 8 (Théorème de Dini)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions continues sur un segment $[a\,;b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue. Le but de cet exercice est de montrer qu'alors la convergence est uniforme.

Pour cela on va procéder par l'absurde. On définit pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a\,;b]\ ;\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n(\varepsilon)$ est une partie fermée de $[a\,;b]$ et que $K_n(\varepsilon) \subseteq K_{n+1}(\varepsilon)$.

2. Justifier que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $K_{n_0}(\varepsilon) = \emptyset$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

On suppose donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n(\varepsilon_0) \neq \emptyset$.

3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n(\varepsilon_0) \neq \emptyset$[2] et donner une contradiction.

---

1. Indice : On pourra étudier l'évolution du degré de P_n quand $n \to +\infty$.
2. Indice : On pourra considérer $x_n = \sup(K_n(\varepsilon_0))$, montrer que $x_n \in K_n(\varepsilon_0)$ et regarder la limite de cette suite.