Rapport sur les travaux effectués
7 janvier 2020

Evelyne Miot

Affectation : Institut Fourier - UMR 5582, Université Grenoble - Alpes

Mots-clés : Équations aux dérivées partielles, analyse non linéaire, équations d'Euler, équations de Vlasov-Poisson, dynamique des points vortex et des filaments de vorticité.

Table des matières

1 Résumé **1**

2 Présentation détaillée des résultats obtenus **2**

3 Références bibliographiques **13**

1 Résumé

Le fil conducteur de ma recherche est l'étude du comportement des solutions de différentes équations aux dérivées partielles en présence de singularités. Selon le contexte, ces singularités correspondent à des tourbillons ponctuels ou filamentaires (pour les fluides, décrits par l'équation d'Euler), à des charges ponctuelles électriques (pour les plasmas, décrits par le système de Vlasov-Poisson) ou à des parois de Néel (dans les matériaux ferromagnétiques, décrits par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert). Je m'intéresse à la dynamique de ces singularités en tant que telles, ou bien lorsqu'elles interagissent avec une partie plus régulière de la solution (généralement bornée). Enfin, une partie de ma recherche concerne le passage du système de Vlasov-Poisson vers l'équation d'Euler dans un régime asymptotique où la solution exhibe de telles singularités ponctuelles. En résumé, mon travail depuis la fin du doctorat s'est principalement articulé autour des axes suivants :

- **Premier axe :** équation d'Euler incompressible en dimension deux, plus particulièrement en présence de tourbillons ponctuels (appelés aussi points vortex).
- **Deuxième axe :** équation de Vlasov-Poisson en dimensions deux et trois, en présence ou non de charges ponctuelles.
- **Troisième axe :** filaments de vorticité dans les fluides incompressibles en dimension trois.

Ces axes révèlent des analogies nombreuses, c'est pourquoi l'on retrouve souvent des problématiques similaires. Premièrement, l'existence et l'unicité de solutions faibles (disons bornées) en présence de singularités. Ensuite, la possibilité de représenter de telles solutions faibles sous forme lagrangienne, c'est-à-dire comme constantes le long des courbes intégrales du flot associé au champ de vitesse total (qui diverge au voisinage des singularités). Enfin, la survenue de collisions en temps fini parmi les trajectoires des singularités et celles du flot. L'étude de ces questions communes fait appel à des outils d'analyse parfois différents et propres au domaine envisagé.

2 Présentation détaillée des résultats obtenus

Je présente ci-dessous les résultats obtenus depuis la fin de mon doctorat, dont la liste figure en section 3 ci-après.

• **Existence et unicité pour l'équation d'Euler, en présence de tourbillons ponctuels ou dans des domaines singuliers.**

$*$ **Existence et unicité en dimension deux : un tour d'horizon des résultats connus.** La première partie de mes résultats porte sur l'équation d'Euler, décrivant l'évolution de fluides parfaits incompressibles en dimension deux :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ désigne le champ de vitesse du fluide et le scalaire $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la pression. J'étudie plus spécifiquement certains écoulements tourbillonnaires, dont le comportement est bien caractérisé par la fonction tourbillon (ou vorticité) $\omega = \mathrm{rot}(u)$. L'équation pour le tourbillon s'écrit

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{2}$$

où u est retrouvée explicitement en fonction de ω par la loi de Biot-Savart : $u = K * \omega$, avec $K(x) = x^\perp/(2\pi|x|^2)$. On se focalise sur les solutions faibles de (2). Yudovich [42] a démontré l'existence globale et l'unicité de la solution $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ pour toute donnée initiale uniformément bornée et intégrable. À l'instar des solutions régulières, la solution de Yudovich est transportée par le flot de u ; il s'agit d'une solution lagrangienne. Nous verrons plus loin qu'il est encore possible de définir une notion de **flot lagrangien** lorsque le champ de vitesse est peu régulier.

Des résultats d'existence globale de solutions faibles à vorticité non bornée ont été établis ultérieurement (voir [10, 38, 35]). Ces résultats incluent en particulier le cas de solutions mesures (dans un certain sens) de l'équation (2). Notre étude s'inscrit dans un tel cadre, puisque nous considérerons un certain type de solutions pour lesquelles la vorticité s'écrit comme superposition d'une composante bornée et de masses de Dirac.

En revanche, sans l'hypothèse de vorticité bornée, les principales méthodes connues – méthode d'énergie et méthode lagrangienne – ne permettent pas d'obtenir l'unicité. En effet, d'une part, la méthode d'énergie est basée sur une estimation de Gronwall pour la norme L^2 des champs de vitesse et repose crucialement sur l'inégalité de Calderón-Zygmund :

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le Cp\|\omega(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall\, 2 \le p < +\infty,$$

ce qui permet de laisser tendre p vers l'infini dans le cas d'une vorticité bornée.

D'autre part, la méthode lagrangienne (voir [33]) réside dans une estimation de Gronwall « log-Lipschitz » pour une distance de type Wasserstein entre deux solutions. Cette estimation exploite la régularité du champ de vitesse associé à une vorticité bornée :

$$|u(t,x)-u(t,y)| \leq C(\|\omega(t,\cdot)\|_{L^1}+\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty})\ |x-y|(1+|\ln|x-y||), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \quad (3)$$

$*$ **Unicité pour l'équation d'Euler dans un domaine avec singularités : article (9).** Alors que les résultats d'existence et d'unicité pour (1) cités ci-dessus dans le cas de $\mathbb{R}^2$, sont également valables dans le cas de domaines connexes réguliers $C^{1,1}$,[a] l'objectif est ici de considérer des domaines plus singuliers. Plus exactement, des ouverts bornés, simplement connexes et réguliers sauf en un nombre fini de « coins », dont nous donnons une définition précise dans (9). Bardos, Di Plinio et Temam [3] ont démontré l'unicité dans le cas particulier du rectangle, par des arguments de symétrie. Notre résultat est le suivant :

*Pour un domaine Ω borné, simplement connexe et régulier sauf en un nombre fini de coins formant des angles **aigus**, il existe une unique solution faible aux équations d'Euler à vorticité bornée.*

À noter que Lacave [27] a démontré un résultat analogue dans le cas de domaines à angles obtus, pour lesquelles la vitesse présente un comportement plus singulier au voisinage des angles, lorsque l'on suppose de plus que le support de la vorticité n'atteint jamais les singularités du domaine.

Notre stratégie de preuve n'est pas celle d'estimation d'énergie mentionnée ci-dessus. En effet, l'inégalité de Calderón-Zygmund

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p,\Omega)\|\omega\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall 1\leq p<+\infty \quad (4)$$

est certes encore vraie en présence d'angles, mais il n'était pas connu, au moment de notre étude, que le comportement de $C(p,\Omega)$ soit linéaire en p lorsque $p\to+\infty$; Bardos, Di Plinio et Temam [3] avaient noté que la preuve de Grisvard [20] donnait plutôt un comportement quadratique par rapport à p, insuffisant pour clore l'inégalité de Gronwall.

C'est pourquoi nous avons utilisé la méthode lagrangienne, en nous ramenant au cas du disque unité D via un biholomorphisme, ce qui permet l'utilisation de formules explicites. Peu de temps après la finalisation de notre article [9], l'inégalité (4) avec $C(p,\Omega)=C(\Omega)p$ a été établie par Di Plinio et Temam [12], ce qui rend en fin de compte possible la preuve d'unicité par estimation d'énergie.

$*$ **Le système Euler-points vortex : articles (2), (3), (13).** J'ai travaillé sur ce sujet pendant mon doctorat et en ai depuis poursuivi l'étude. On s'intéresse à des écoulements de fluides comportant des tourbillons ponctuels, ou points vortex. Autrement dit, le champ de vitesse exhibe des singularités ponctuelles qui se traduisent par des masses de Dirac dans la fonction tourbillon : celle-ci est proche, en un certain sens, d'une superposition de la forme

$$\mathrm{rot}(u(t,\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell}\gamma_k\delta_{z_k(t)} + \omega(t,\cdot), \quad (5)$$

a. Avec conditions de tangence de la vitesse au bord.

où $\omega(t,\cdot)$ est une partie plus régulière, et où les coefficients γ_k sont appelés intensités (ou circulations) des points vortex. En accord avec la loi de Biot-Savart, le champ de vitesse correspondant s'écrit comme

$$u(t,\cdot) = K * \left(\omega(t,\cdot) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \delta_{z_k(t)}\right) = v(t,\cdot) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k(t)). \tag{6}$$

L'objet de notre étude est le système qui résulte formellement de l'équation d'Euler dans cette situation. Il s'agit d'un couplage d'une EDP pour l'évolution de la partie régulière $\omega(t,\cdot)$, et des EDO pour la dynamique des tourbillons ponctuels. Appelé système Euler-points vortex, ce système a été introduit et étudié indépendamment par Marchioro et Pulvirenti [33, 32] et par Starovoǐtov [39, 40] :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k)\right) \cdot \nabla \omega = 0, \\ \dfrac{dz_k}{dt} = v(t, z_k) + \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j), \quad 1 \leq k \leq \ell \end{cases} \tag{7}$$

où $v = K * \omega$ est le champ de vitesse induit par le tourbillon ω. En particulier, on retrouve le système des points vortex (ou loi de Kirchhoff) lorsque $\omega = 0$:

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j), \quad 1 \leq k \leq \ell. \tag{8}$$

Marchioro et Pulvirenti ont établi l'existence globale d'une solution pour (7) avec tourbillon $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ lorsque les intensités γ_k sont toutes de même signe. Cette condition de signe garantit, pour (7) comme pour (8), que les trajectoires des points vortex n'entrent pas en collision. La question de l'unicité dans le cas général constitue un problème ouvert. Elle a été résolue par Marchioro et Pulvirenti [32], puis par C. Lacave et moi-même dans l'article (2) par des techniques différentes dans le cas où le tourbillon est constant au voisinage des tourbillons ponctuels.

Comme déjà évoqué, des questions importantes dans ce cadre sont celles
- d'une part de l'existence et de l'unicité d'un flot correspondant au champ de vitesse total u défini par (6),
- d'autre part de savoir si toute solution de l'équation de transport donnée par la première ligne de (7) est nécessairement lagrangienne, comme dans le cas sans tourbillon ponctuel.

Une très vaste littérature est dédiée aux équations de transport linéaires avec champ peu régulier. Pionniers dans ce domaine, DiPerna et Lions [11] ont établi des conditions suffisantes de régularité spatiale faible du champ de vitesse donnant lieu à l'existence et l'unicité d'une certaine notion de flot, appelée désormais **flot régulier Lagrangien**, qui transporte toute solution faible de l'équation de transport associée. De nombreux travaux, notamment d'Ambrosio, sont depuis venus étendre la théorie. On renvoie à l'article [1] pour un état de l'art de ces récents développements. Dans le cas du système Euler-points vortex, le champ donné par (6) n'a pas la régularité requise par les résultats connus. Nous avons donc du mener dans l'article (2) une étude ad hoc afin de montrer que toute solution faible est bien lagrangienne, avec un flot continu en temps et en espace, dont les trajectoires n'entrent pas en collision avec celles des tourbillons ponctuels.

Dans l'article (3), nous avions démontré l'existence d'une solution faible pour le système mixte (7) avec tourbillon dans L^p pour tout temps pour un certain $2 < p < \infty$.

L'objectif de l'article (13) suivant, en collaboration avec G. Crippa, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes, a été de répondre de manière positive aux questions ci-dessus. Plus précisément nous avons considéré le cas d'un seul point vortex et le cas plus général d'un champ de vitesse de la forme

$$u = v + \gamma K(\cdot - z),$$

avec v appartenant à un espace de type $L^\infty(W^{1,p}_{\mathrm{loc}})$, à divergence nulle, et satisfaisant à de bonnes conditions à l'infini, et z une trajectoire lipschitzienne quelconque. Nous avons ainsi démontré que

Si u un champ de vitesse de la forme ci-dessus, il existe un unique flot régulier lagrangien, au sens d'Ambrosio (voir [1]), qui préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, toute solution de l'équation de transport associée

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$$

est constante le long des courbes intégrales du flot[b]*. Enfin, **génériquement**, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec la trajectoire du tourbillon ponctuel.*

La seconde partie de (13) procure une méthode de construction du flot lagrangien comme limite dans L^1_{loc} des flots associés à une certaine suite de champs réguliers approchant u dans L^1_{loc}. Le taux de convergence est explicite.

Afin d'établir le premier résultat, nous avons exploité les connections connues entre les propriétés d'existence et d'unicité au niveau de l'équation de transport et celles au niveau du flot lagrangien. Pour le second résultat, nous nous sommes placés dans le cadre des travaux de Crippa et de Lellis [8], qui s'affranchissent totalement du lien EDP - EDO pour étudier les propriétés du flot lagrangien (associés à des champs à régularité spatiale de type Sobolev).

$*$ **Le système Euler-points vortex massiques : article (19).** Nous étudions le caractère bien posé du système couplé

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \Big(v + \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(x - z_k)\Big) \cdot \nabla \omega = 0, \\ m_k \ddot{z}_k = \gamma_k \Big(\dot{z}_k - v(t, z_k) - \displaystyle\sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j)\Big)^{\perp}, \quad 1 \leq k \leq \ell, \end{cases} \tag{9}$$

où, à nouveau, $v = K * \omega$. Les points z_k sont dénommés points vortex massiques, affectés des masses strictement positives m_k et des circulations de signe quelconque γ_k. D'un point de vue physique, ce système apparaît comme un système limite d'évolution pour un fluide de vorticité ω évoluant à l'extérieur d'un nombre fini de petits solides circulaires, centrés

b. Puisque le flot prserve la mesure de Lebesgue, cela revient dire que $\omega(t, \cdot)$ est le poussé en avant de $\omega(0, \cdot)$ par le flot.

autour des z_k, de masse m_k et circulation du champ de vitesse γ_k, dont la taille tend vers zéro à masses et circulations constantes. Le terme de force gyroscopique $\dot{z}_k^\perp$ apparaissant dans (9) est réminiscent de la force dite de Kutta-Jukowski qui est due à l'interaction fluide/solide. L'obtention rigoureuse du système (9) dans cette asymptotique, pour un seul point vortex massique, a été obtenue par Glass, Lacave et Sueur [15]. Une conséquence immédiate en est l'existence globale d'une solution faible, avec $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Lorsque $\ell > 1$, il n'existe pas de résultat rigoureux d'asymptotique de petits solides. En particulier, la question de l'existence ne peut pas être résolue de cette manière.

Remarquons que le système (9) donne immédiatement le système Euler-points vortex lorsque les masses sont toutes nulles. Et en effet, toujours pour $\ell = 1$, Glass, Lacave et Sueur [16] ont établi l'asymptotique de l'interaction fluide/solide dans la limite de petit solide et de masse nulle.

Dans (19), nous avons établi les analogues des principaux résultats connus pour le système Euler-points vortex, à savoir :

Supposons que tous les γ_k sont de même signe. Alors il existe une solution faible globale bornée au système (9). *Toute solution faible est transportée par le flot régulier lagrangien associé au champ de vitesse total.* ***Génériquement****, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec les trajectoires des points vortex massiques. Si* ***de plus*** *la vorticité est initialement constante au voisinage de chacun des points vortex massiques, la solution faible est unique.*

Les preuves utilisent les mêmes ressorts que celles de (2) pour le système Euler-point vortex. L'ingrédient essentiel qui rend possible cette adaptation est l'introduction d'une nouvelle fonctionnelle d'énergie locale, permettant de contrôler les distances entre les trajectoires du flot régulier lagrangien et celles des points vortex. Cette approche pour contrôler les collisions à l'aide d'une fonctionnelle d'énergie bien choisie avait été utilisé par Marchioro [31] dans le cas d'un point vortex fixe. Nous l'avons aussi utilisée abondamment pour des problèmes analogues à propos de l'équation de Vlasov-Poisson, cf. ci-dessous.

- **Existence et unicité pour le système de Vlasov-Poisson.**

Mon post-doctorat avec M. Pulvirenti a été le point de départ de mon travail sur l'équation de Vlasov-Poisson. Il s'agit d'un modèle pour décrire les plasmas à l'aide d'une densité de probabilité de particules électriques $f(t,x,v)$, avec $x, v \in \mathbb{R}^d$ où $d = 2$ ou $d = 3$, et dont l'évolution est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0. \tag{10}$$

Ici, $E = E(t,x)$ est le champ électrique, donné par la formule de convolution $E = x/|x|^d * \rho$, où $\rho = \rho(t,x) = \int f(t,x,v)\, dv$ désigne la densité macroscopique de particules.

L'existence globale et l'unicité de solutions classiques et à support compact en vitesses ont été établies par Ukai et Osabe [36] pour $d = 2$ et par Pfaffelmoser [34] pour $d = 3$. L'approche eulérienne a été adoptée par Lions et Perthame [29], qui ont établi l'existence globale de solutions faibles propageant des moments en vitesse d'ordre supérieur à 3

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |v|^k f(t,x,v)\, dx\, dv < +\infty, \quad k > 3.$$

L'unicité de telles solutions a lieu sous des hypothèses de régularités supplémentaires pour les données initiales et des moments d'ordre au moins 6.

Par la méthode lagrangienne expliquée ci-dessus, applicable donc également à l'équation d'Euler, associée à des propriétés de transport optimal, Loeper [30] a ensuite démontré l'unicité dans la classe des solutions qui vérifient $\sup_{t\in[0,T]} \|\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty} < +\infty$. Tant la compacité du support en vitesses que la condition de Loeper assurent que le champ électrique est uniformément borné et de régularité log-Lipschitz (voir (3) pour l'équation d'Euler). Ici encore, de part les structures très semblables de ces deux équations, c'est sur cette estimation log-Lipschitz que repose la preuve d'unicité avec la méthode lagrangienne.

$*$ **Unicité et stabilité pour l'équation de Vlasov-Poisson : articles (14), (16).** Dans (14), mon objectif était de généraliser la condition d'unicité de Loeper. J'ai établi l'unicité pour le système de Vlasov-Poisson en dimensions deux et trois sur un intervalle $[0,T]$ parmi les solutions telles que

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{p\geq 1} \frac{\|\rho(t,\cdot)\|_{L^p}}{p} < +\infty.$$

Cette condition autorise notamment les solutions qui divergent de façon logarithmique. La démonstration se fonde sur la formulation lagrangienne de l'équation de Vlasov-Poisson, en introduisant une distance liée à la distance de Monge-Kantorovich entre deux solutions. Elle exploite de façon essentielle le fait que les courbes intégrales satisfont à une EDO **d'ordre deux**. Par conséquent, il est possible de généraliser le lemme de Gronwall à des champs "moins" que log-Lipschitz :

$$|E(t,x) - E(t,y)| \leq C \sup_{p\geq 1}(\|\rho(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}/p)|x-y|(1+|\ln|x-y||)^2.$$

Nous insistons sur le fait que cette régularité "$\log^2$-Lipschitz" serait insuffisante pour l'équation d'Euler. L'article (14) comporte également des exemples explicites de données initiales non bornées qui donnent lieu à des solutions vérifiant le critère d'unicité. Dans le cas gravitationnel en dimension deux, ces données s'avèrent être reliées à une classe d'états stationnaires à symétrie sphérique.

Dans l'article (16), écrit en collaboration avec T. Holding, nous généralisons la condition apparaissant dans (14) aux solutions dont la densité macroscopique appartient aux espaces de Orclicz, c'est-à-dire de norme $\|\cdot\|_\alpha$ finie, où

$$\|\rho\|_\alpha = \sup_{p\geq\alpha} p^{-1/\alpha}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, avec $\alpha = 1$ on retrouve bien l'espace de l'article (14) et avec $\alpha = +\infty$ celui de Loeper (L^∞). Outre l'unicité, nous établissons des estimations de stabilité explicites, au cours du temps, entre deux solutions dont les densités macroscopiques appartiennent à un espace de Orlicz. La distance considérée est celle de Wasserstein (ou de Monge-Kantorovitch), dans l'esprit des estimations de Dobrushin [13] pour des équations de type champ moyen avec champs lipschitziens.

$*$ **Le système de Vlasov-Poisson avec des charges ponctuelles : articles (4), (6), (12).** Ce paragraphe concerne l'existence et l'unicité de la solution du système de

Vlasov-Poisson en dimensions deux ou trois dans un contexte analogue au système Euler-points vortex. Il s'agit de l'interaction entre une densité bornée f de plasma et un nombre fini de charges ponctuelles ξ_k, de vitesse η_k, et de charge q_k :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \left(E + \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} q_k \frac{x - \xi_k}{|x - \xi_k|^d} \right) \cdot \nabla_v f = 0, \\ \dot{\xi}_k = \eta_k, \quad \dot{\eta}_k = q_k E(t, \xi_k) + \displaystyle\sum_{j \neq k} q_k q_j \frac{\xi_k - \xi_j}{|\xi_k - \xi_j|^d}, \quad 1 \leq k \leq \ell. \end{cases} \tag{11}$$

En particulier, on retrouve bien le système de Vlasov-Poisson (10) en l'absence de charges ($q_k = 0$). Lorsque $q_k \neq 0$, de même que les points vortex dans l'équation d'Euler, les charges ponctuelles sont à l'origine d'une composante singulière dans le champ électrique total. Ce système a été introduit et étudié pour $d = 2$ par Caprino et Marchioro [6].

En collaboration avec C. Marchioro et M. Pulvirenti, nous avons démontré dans l'article (4) :
Pour $d = 3$ et pour une ***interaction répulsive*** *entre plasma et charges, si la densité initiale de plasma s'annule dans un voisinage des charges, il existe une unique solution globale de* (11) *avec densité macroscopique uniformément bornée, qui est de plus constante le long des courbes intégrales du flot relatif au champ électrique total. Pour tout temps, la densité est nulle dans un voisinage des charges.*

Notre preuve est une adaptation de celle de Pfaffelmoser [34]. Elle nécessite une analyse détaillée du comportement de type diffusif des trajectoires de plasma au voisinage des charges, à cause du champ singulier créées par celles-ci. Une notion clé est celle d'énergie microscopique locale, contrôlant à la fois les vitesses et les distances entre les particules de plasma et les charges.

L'article (12), en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, correspond à l'étape naturelle suivante de l'étude de (11). Il s'agit de traiter une classe de densités qui peuvent ne pas s'annuler au voisinage des charges ponctuelles mais qui ont des moments (en énergie) finis, ce qui mène à nous placer dans le même contexte que Lions et Perthame [29]. Dans le cas d'une seule charge ponctuelle et sous une hypothèse de petitesse de masse de la densité de plasma, notre résultat principal est le suivant :

Il existe une solution faible globale, propageant les moments en énergie d'ordre supérieur à 6 *mais inférieur à* 7.

Soulignons que même si ce résultat permet de considérer des densités non nulles au voisinage de la charge, elles doivent y décroître dans un certain sens. L'hypothèse $k > 6$ exclut par exemple les densités macroscopiques qui sont à symétrie sphériques et constantes autour de la charge.

Dans l'article (6), en collaboration avec S. Caprino, C. Marchioro et M. Pulvirenti, nous nous intéressons cette fois pour (11) au cas d'une **interaction attractive** entre le plasma et les charges i.e. $q_k < 0$. Nous nous plaçons en dimension deux car l'analyse y est, y compris pour le cas sans charge, beaucoup moins délicate qu'en dimension trois. Nous supposons qu'initialement, le plasma est distribué de sorte que l'énergie locale au voisinage de chaque charge soit majorée au voisinage de chacune des charges.

Il existe une solution globale telle que le champ électrique est uniformément borné mais telle que la densité macroscopique diverge de façon au plus logarithmique au voisinage des *charges. De plus, la densité f est constante le long des courbes intégrales du flot relatif au champ électrique total. Génériquement, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec celles des charges ponctuelles.*

Il est à noter que, en raison de la nature attractive de l'interaction, l'énergie locale n'est plus une quantité coercive. Ainsi, on autorise des données initiales pour lesquelles la densité de plasma est non nulle au voisinage des charges. Notons enfin l'analogie de ce résultat d'existence de flot avec non collision générique de trajectoires avec celui établi pour le système Euler-points vortex dans (13).

• **De Vlasov-Poisson (avec charges) vers Euler (avec points vortex) : articles (17) et (2) .**

Dans [2], Brenier a étudié un régime asymptotique pour l'équation de Vlasov-Poisson en dimension deux, appelé limite gyrocinétique, dans lequel les solutions convergent vers une solution de l'équation d'Euler incompressible. La limite de Vlasov-Poisson vers Euler avait été également établie dans des régimes similaires par Grenier [19] et Golse et Saint-Raymond [18], puis par Saint-Raymond [37]. De nombreux autres régimes pour des équations de type Vlasov, linéaires ou non linéaires ont été par ailleurs analysés ces dernières années. La limite gyrocintétique que nous étudions correspond à appliquer un champ magnétique de large intensité, constant et orthogonal à un ensemble bidimensionnel de particules chargées. À remise à l'échelle près, nous sommes ramenés à étudier le comportement asymptotique du système suivant lorsque ε tend vers zéro :

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \dfrac{v}{\varepsilon} \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \left(\dfrac{E_\varepsilon}{\varepsilon} + \dfrac{v^\perp}{\varepsilon^2} \right) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ E_\varepsilon(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \rho_\varepsilon(t,y)\, dy, \quad \rho_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t,x,v)\, dv. \end{cases} \tag{12}$$

Dans (12), le champ magnétique intense se trouve représenté par le terme $v^\perp = (v_1, v_2)^\perp = (-v_2, v_1)$.

Dans la prépublication (2) [c], j'ai démontré que

Si les données initiales f_ε^0 satisfont à des bornes uniformes en énergie et en masse par rapport à ε, et si de plus les normes L^∞ n'explosent pas trop vite : $\varepsilon^2 \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \ln \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$, alors la suite des densités macroscopiques converge (à sous-suite près, faiblement-étoile) vers une mesure qui est une solution "nappe de tourbillon" de l'équation d'Euler (1).

Autrement dit, la densité limite joue le rôle de la vorticité ω, est une mesure de Radon positive, appartient de plus à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ et vérifie (1) dans le sens élargi donné par Delort [10] ou Schochet [38]. Ce résultat est comparable à celui de [37], dans lequel les données initiales sont supposées vérifier des bornes uniformes en énergie et moment mais également la convergence $\varepsilon \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. À la différence des techniques de [18, 37], qui reposent sur une nouvelle formulation EDP du système (12), notre preuve repose de façon fondamentale sur l'EDO vérifiée par une combinaison judicieuse des caractéristiques, appelée "gyro-coordonnée" et qui avait déjà été utilisée dans [17, 21] pour une équation de Vlasov linéaire.

c. Acceptée pour publication dans Kinetic and Related Models, en cours de révision.

Dans l'article (17), j'ai considéré la même problématique, cette fois dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson en présence d'une charge ponctuelle. J'ai ainsi étudié la limite gyrocinétique pour le système (11) avec une seule charge ponctuelle $q \neq 0$ et des données initiales $(f_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^0)$ vérifiant des hypothèses analogues à celles de (2). Le résultat principal est le suivant :

À sous-suite près, la suite de densités macroscopiques converge vers une nappe de tourbillon ρ, la suite des trajectoires de la charge converge vers une trajectoire höldérienne ξ, et la mesure totale $\rho + q\delta_\xi$ vérifie l'équation d'Euler ***avec une mesure de défaut****, selon la formulation généralisée de Poupaud [35].*

Il s'avère aussi que si l'on suppose davantage de régularité pour la densité limite, l'équation d'Euler se découple en une EDP pour ρ et une EDO pour ξ qui n'est autre que le système Euler-point vortex (7), où ρ joue le rôle de ω, $E^\perp$ celui de la vitesse v, et ξ celui du point vortex.

Les preuves de (17) assemblent différents ingrédients, en particulier, une nouvelle formulation faible vérifiée par la mesure $\rho_\varepsilon + \delta_{\xi_\varepsilon}$, qui s'appuie sur celle de [18] d'une part, et sur l'EDO vérifiée par la combinaison $\xi_\varepsilon + \varepsilon\eta_\varepsilon^\perp$ d'autre part. L'utilisation des gyro-coordonnées de (2) ne permet pas dans ce contexte d'obtenir le résultat de convergence, à cause de la singularité du champ créé par la charge.

- **Un couplage fluide/cinétique : article (18).**

Ce paragraphe se situe à l'interface entre équations cinétiques et équations de la mécanique des fluides. En effet, on étudie le système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel utilisé par exemple comme modèle pour la dynamique des aérosols dans les poumons. Il s'agit de décrire l'interaction entre un fluide visqueux incompressible avec vitesse $u = u(t,x)$ et un nuage de particules avec densité $f = f(t,x,v)$:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \Delta u + \nabla p = j - \rho u, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \operatorname{div}_v[f(u-v)] = 0, \end{cases} \tag{13}$$

où $(t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2$ (avec Ω le tore bidimensionnel ou le plan) et où

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,v)\,dv, \quad j(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} vf(t,x,v)\,dv.$$

On reconnaît l'équation de Navier-Stokes (avec terme source dépendant de f) pour le fluide et une équation de Vlasov amortie pour les particules. La question de l'existence globale d'une solution faible d'énergie finie pour (13) avait été résolue (voir [4, 7, 41, 5]). Dans (18), nous avons démontré :

Pour une donnée initiale admissible (u_0, f_0), il existe au plus une solution faible (u,f) correspondante au système de Vlasov-Navier-Stokes.

Par donnée admissible, on entend un couple (u_0, f_0) vérifiant les conditions usuelles pour l'existence globale (en particulier, l'énergie doit être finie) et dont la densité f_0 vérifie une condition particulière sur les deux premiers moments en vitesse. Celle-ci est satisfaite lorsque, par exemple, f_0 décroît assez vite en vitesse, uniformément en x. Cette condition a pour but d'assurer que toute solution faible a ses premiers moments $\rho = \int f\,dv$, $j =$

$\int v\, f\, dv$, et $\int |v|^2 f\, dv$ uniforméments bornés sur Ω à temps positif. On retrouve ici une condition analogue au critère d'unicité de Loeper [30] pour le système de Vlasov-Poisson. Notre démonstration utilise une méthode d'énergie pour la partie fluide et une méthode lagrangienne pour la partie cinétique, avec des estimations sur la fonction maximale du gradient de la différence des vitesse qui permettent de prendre en compte le couplage.

- **Filaments tourbillonnaires dans les fluides en dimension trois : articles (7), (8), (11), (15).**

Cet axe porte sur la dynamique des tourbillons filamentaires dans les fluides incompressibles en dimension trois. Ces tourbillons filamentaires sont le pendant tridimensionnel des tourbillons ponctuels (points vortex) évoqués ci-dessus : ils représentent le support de la vorticité, assimilée à une masse de Dirac le long de la courbe et de direction donnée par le vecteur tangent de la courbe.

Selon le modèle proposé par Da Rios [9], la dynamique d'un seul tourbillon filamentaire peut être décrite par le flot par courbure binormale :

$$\partial_t \chi = \frac{\partial_s \chi \times \partial_{ss} \chi}{|\partial_s \chi|^3},$$

où $\chi(t,s) \in \mathbb{R}^3$ (avec $s \in \mathbb{R}$) désigne un certain paramétrage de la courbe. Des solutions particulières sont données par les anneaux se propageant à vitesse constante, les hélices, ou encore les lignes droites. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement au cas de ℓ filaments χ_j **tous presque parallèles** à un axe. En les paramétrant par $\chi_j(t,s) = (s, \Psi_j(t,s))$ avec $\Psi_j \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{R}$, Klein, Majada et Damodaran [25] ont obtenu un système d'équations simplifiées pour les Ψ_j :

$$i\partial_t \Psi_j + \alpha_j \gamma_j \partial_{ss} \Psi_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{\Psi_j - \Psi_k}{|\Psi_j - \Psi_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell. \tag{14}$$

Les γ_j représentent les circulations des filaments et les $\alpha_j > 0$ sont des paramètres reliés aux structures des filaments. Ce système combine d'une part l'auto-interaction de chaque filament, caractérisée par l'opérateur de Schrödinger libre et provenant du flot binormal (linéarisé), et d'autre part l'interaction avec les autres filaments. Notons que des solutions particulières sont données par les collections de filaments droits :

$$\Psi_j(t,s) = z_j(t), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

pour lesquelles on retrouve alors le système des tourbillons ponctuels (8) déjà mentionné :

$$i\dot{z}_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

En premier lieu se pose la question de l'existence de solutions pour le système des filaments, ce qui va de pair avec celle de collisions en temps fini entre d'entre eux. Le premier résultat rigoureux dans cette direction a été obtenu par Kenig, Ponce et Vega [26] qui ont démontré l'existence globale d'une solution pour des perturbations de filaments droits formant soit une paire quelconque, soit un triangle equilatéral en rotation uniforme.

Dans notre premier article (7), nous avons obtenu plusieurs résultats d'existence globale ou en temps grand de filaments. En particulier, nous avons établi un résultat d'existence globale pour le cas de ℓ filaments, avec $\ell \geq 3$, lorsque (Ψ_j) est une perturbation symétrique, assez petite, d'un polygone régulier (z_j) en rotation :

$$\Psi_j(t,s) = z_j(t)\Phi(t,s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons alors que la dynamique de la perturbation est régie par une équation hamiltonienne remarquable :

$$i\partial_t \Phi + \partial_{ss}\Phi + \omega \frac{\Phi}{|\Phi|^2}(1 - |\Phi|^2) = 0, \tag{15}$$

où ω est la vitesse de rotation du polygone. La taille de la perturbation est alors quantifiée par le Hamiltonien associé à (15) :

$$E(\Phi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_s \Phi|^2 + \omega(-\ln|\Phi|^2 + |\Phi|^2 - 1)\right) ds,$$

qui est une quantité coercive lorsque $\omega > 0$.

La seconde partie de notre recherche au sujet des filaments presque parallèles a été consacrée à démontrer l'existence d'une collection de filaments symétriques présentant une collision en temps fini. De premiers exemples simples, explicites, sont construits dans l'article (8).

Comme première étape d'une étude plus générale, nous avons ensuite réalisé dans (11) une étude à la fois théorique et numérique du système obtenu pour la paire de filaments avec des circulations de signe opposé. En suivant une suggestion de Zhakarov [43], nous avons construit une **collision auto-similaire** à un temps t_0 arbitraire, et qui a un comportement linéaire à l'infini. Les deux filaments ne collisionnent qu'au temps $t = 0$ et à la position $s = 0$. En revanche, étant donné le comportement asymptotique du profil, ce type de solutions sort du cadre des filaments droits à l'infini. Notre travail le plus récent, présenté ci-après, a remédié à cette restriction.

Dans l'article (15), nous revenons au cadre des filaments droits à l'infini :

$$\Psi_j(t,s) \to z_j(t) \quad \text{lorsque } s \to \pm\infty,$$

où (z_j) désigne une solution du système des tourbillons ponctuels (8). Nous nous focalisons sur les deux cas suivants, qui présentent des propriétés de symétrie très utiles :

– la paire de filaments avec circulations opposées et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (cadre de l'article (11)) ;

– un nombre arbitraire de filaments avec même circulation et avec symétrie polygonale (cadre de l'article (7)).

Notre résultat est le suivant :

Pour t_0 assez petit, il existe une solution du système (14) *sur* $[0, t_0)$ *dont les filaments sont droits à l'infini et telle que tous les filaments entrent en collision si et seulement si* $t = 0$ *et* $s = 0$.

Notre démonstration met en oeuvre une méthode de point fixe dans un espace de Banach convenablement choisi et nécessite des estimations fines de type Strichartz localisées près de l'origine. Elle exploite largement la forme explicite du profil des solutions autosimilaires construit dans (11), en les renormalisant à l'infini de sorte à obtenir le comportement asymptotique souhaité.

• **Dynamique des parois de Néel dans les films ferromagnétiques minces : article (10).**

Nous considérons un modèle pour des films ferromagnétiques minces, décrits par une fonction aimantation dépendant du temps

$$m = m(t, x) : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{S}^2,$$

où Ω, correspondant à la section transverse du film, est un domaine bidimensionnel et périodique dans une direction.

Les études physiques prédisent que l'état fondamental correspond à la minimisation d'une certaine énergie libre $E_{\varepsilon,\delta}(m_{\varepsilon,\delta})$, faisant intervenir des petits paramètres ε et δ reliés aux caractéristiques du matériau. Il est aussi observé que la compétition des différents termes de l'énergie, dans certains régimes asymptotiques où ε et δ tendent vers zéro, favorisent l'émergence de structures singulières :

– des singularités de type ligne, ou paroi de Néel, pour lesquelles l'aimantation connecte deux états constants en effectuant un saut le long d'une ligne ;

– des singularités de type vortex, ou paroi de Bloch, correspondant à une échelle d'énergie supérieure aux parois de Néel.

Une première partie de (10) est dédiée au cas stationnaire ; nous établissons rigoureusement la compacité des aimantations dans le régime énergétique compatible avec l'apparition des parois de Néel mais excluant les vortex. Nous établissons aussi l'optimalité des parois de Néel et montrons que toute famille d'aimantations **bien préparées**, c'est-à-dire d'énergie asymptotiquement quasi-minimale, converge (à sous-suite près) vers une paroi de Néel. Ce résultat fait suite aux travaux de Ignat et Otto [23, 24] pour des régimes d'énergie différents ou des aimantations à valeurs dans $\mathbb{S}^1$.

Le second volet de notre travail concerne la dynamique asymptotique de l'aimantation, dans le régime considéré ci-dessus, et selon l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert régissant la dynamique de l'aimantation [14, 28]. Celle-ci est une interpolation d'un modèle hamiltonien (type “Schödinger map”) et d'un modèle dissipatif (type “application harmonique”). Dans un premier temps, nous étudions le problème de Cauchy et nous construisons des solutions faibles globales, d'énergie finie, pour tout $\delta > 0$ fixé. Puis, nous établissons que pour un certain choix des paramètres de l'équation, la dynamique limite de toute suite de solution est triviale : les parois de Néel sont stationnaires.

3 Références bibliographiques

Mes publications dans des revues à comité de lecture

(19) *The vortex-wave system with gyroscopic effects* (avec C. Lacave) (2019), accepté pour publication dans Annales SNS (2019).

(18) *Uniqueness of the solution to the 2D Vlasov-Navier-Stokes system* (avec D. Han-Kwan, A. Moussa et I. Moyano), accepté pour publication dans Rev. Mat. Iberoam (2019).

(17) *The gyrokinetic limit for the Vlasov-Poisson system with a point charge*, Nonlinearity **32** (2019), 654-677.

(16) *Uniqueness and stability for the Vlasov-Poisson system with spatial density in Orlicz spaces* (avec T. Holding), Contemporary Mathematics, Mathematical Analysis in Fluid Mechanics : Selected Recent Results 710 (2018), 145–162.

(15) *Collisions of almost parallel vortex filaments* (avec V. Banica et E. Faou), Comm. Pure Appl. Math. **70** (2017), 378–405.
(14) *A uniqueness criterion for unbounded solutions to the Vlasov-Poisson system*, Comm. Math. Phys. **346** **(2)** (2016), 469–482.
(13) *Flows of vector fields with point singularities and the vortex-wave system* (avec G. Crippa, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes), Discrete and continuous dynamical systems **5** (2016), 2405–2417.
(12) *Polynomial propagation of moments and global existence for a Vlasov-Poisson system with a point charge* (avec L. Desvillettes et C. Saffirio), Annales de l'IHP Analyse Non Linéaire **32** **(2)** (2015), 373–400.
(11) *Collisions of vortex filaments pairs* (avec V. Banica et E. Faou), Journal of Nonlinear Science **24** (6) (2014), 1262–1284.
(10) *A thin-film limit in the Landau-Lifshitz-Gilbert equation relevant for the formation of Néel walls* (avec R. Cote et R. Ignat), J. Fixed Point Theory Appl. **15** (2014), no. 1, 24—272.
(9) *Uniqueness for the 2-D Euler equations on domains with corners* (avec C. Lacave et C. Wang), Indiana Univ. Math. J. **63**(6) (2014), 1725–1756.
(8) *Evolution, interaction and collisions of vortex filaments* (avec V. Banica), Differential and Integral Equations **26** (2013), 355–388.
(7) *Global existence and collisions for certain configurations of nearly parallel vortex filaments* (avec V. Banica), Annales de l'IHP Analyse Non Linéaire **29** (2012), 813–832.
(6) *On the 2D attractive plasma-charge model* (avec S. Caprino, C. Marchioro et M. Pulvirenti), Comm. Partial Differential Equations **37** (2012), no. 7, 1237–1272.
(5) *On the Kac model for the Landau equation* (avec M. Pulvirenti et C. Saffirio), Kinetic and related models **4** (2011), no. 1, 333–344.
(4) *The Cauchy problem for the three-dimensional Vlasov-Poisson equation with point charges* (avec C. Marchioro et M. Pulvirenti), Arch. Ration. Mech. Anal **201** (2011), no. 1, 1–26.

Articles issus de la thèse :
(3) *Existence of a weak solution in L^p to the vortex-wave system* (avec M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes), J. Nonlinear Science **21** (2011), no. 5, 685–703.
(2) *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is initially constant near the point vortex* (avec C. Lacave), SIAM J. Math Analysis **41** (2009), no. 3, 1138–1163.
(1) *Dynamics of vortices for a complex Ginzburg-Landau equation*, Analysis & PDE **2** (2009), no. 2, 159–186.

Actes de conférence, notes d'exposé ou autres textes

(7) *On some coupled PDE - ODE systems in fluid dynamics*, Journées équations aux dérivées partielles (2018), Exp. No. 5, 13 p.
(6) *Le centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte* (avec T. Bouche et C. Vaudaine), La Gazette des mathématiciens no 155 (2018), 76-78.
(5) *Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires* (d'après V. Banica et L. Vega), Séminaire Bourbaki, Juin 2016.
(4) *Existence globale et propagation des moments pour une équation de Vlasov-Poisson avec une charge ponctuelle*, Séminaire Laurent-Schwartz (Polytechnique) (2013).

(3) *Two existence results for the vortex-wave system*, Acte de la conférence "Hyperbolic conservation laws and fluid dynamics" (2010), Riv. Univ. Parma 3 (2012), no. 1.
(2) *Dynamique des points vortex dans une équation de Ginzburg-Landau complexe*, Séminaire X-EDP (Polytechnique) (2009-2010), Exp. no. 21, 13 p.
(1) *Le système dynamique de N tourbillons ponctuels*, dans "Des problèmes à N corps aux Tokamaks" (X-UPS 2015), Journées mathématiques X-UPS 2015, Les Éditions de l'École polytechnique..

Prépublications

(2) *On the gyrokinetic limit for the two-dimensional Vlasov-Poisson system*, prépublication, 2016. (accepté pour publication dans Kinetic and Related Models, en cours de révision).
(1) *Damped wave-like dynamics for a complex Ginzburg-Landau equation with law dissipation*, prépublication, 2009.

Mémoires universitaires

(2) *Solutions lagrangiennes ou singulières de Vlasov-Poisson et d'Euler : existence, unicité, interactions et collisions*, mémoire d'habilitation à diriger des recherches (2019), HAL Id : tel-02419493.
(1) *Quelques problèmes relatifs à la dynamique des points vortex dans les équations d'Euler et de Ginzburg-Landau complexe*, thèse de doctorat (2009), HAL Id : tel-00444820.

Références

[1] L. Ambrosio et D. Trevisan, *Lecture notes on the DiPerna-Lions theory in abstract measure spaces*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. **26** (2017), no. 6, 729–766. 4, 5

[2] Y. Brenier, *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, Comm. Partial Differential Equations **25** no. 3-4 (2007), 737–754. 9

[3] C. Bardos, F. Di Plinio et R. Temam, *The Euler equations in planar nonsmooth convex domains*, J. Math. Anal. Appl. **407**, no. 1 (2013), 69–89. 3

[4] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont et A. Moussa, *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations*, Differential Integral Equations **22**, no. 11-12 (2009), 1247–1271. 10

[5] L. Boudin, C. Gramont et A. Moussa, *Global existence of solutions to the incompressible Navier–Stokes–Vlasov equations in a time-dependent domain*, J. Differential Equations **262** (2017), 1317–1340. 10

[6] S. Caprino et C. Marchioro, *On the plasma-charge model*, Kin. Rel. Mod. **3** n. 2 (2010), 241-254. 8

[7] C. Yu, *Global weak solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **100**, no. 2 (2013), 275–293. 10

[8] G. Crippa et C. De Lellis, *Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow,* J. Reine Angew. Math. (2008). 5

[9] L. Da Rios, *Sul moto di un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, Palermo Rend. **22** (1906), 117–135. 11

[10] J. M. Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 553-586. 2, 9

[11] R. J. DiPerna et P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,* Invent. Math. **98** (1989), 511–547. 4

[12] F. Di Plinio et R. Temam, *Grisvard's shift theorem near L^∞ and Yudovich theory on polygonal domains*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), no. 1, 159–178. 3

[13] R. Dobrushin, *Vlasov equations*, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 115–123. 7

[14] T. L. Gilbert, *A lagrangian formulation of gyrokinetic equation of the magnetization field*, Phys. Rev. **100** (1955), 1243. 13

[15] O. Glass, C. Lacave et F. Sueur, *On the motion of a small body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid*, Bull. Soc. Math. France **142** (2014), no. 3, 489–536. 6

[16] O. Glass, C. Lacave et F. Sueur, *On the motion of a small light body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid with vorticity*, Comm. Math. Phys. **341** (2016), no. 3, 1015–1065. 6

[17] P. Ghendrih, M. Hauray et A. Nouri, *Derivation of a gyrokinetic model. Existence and uniqueness of specific stationary solution*, Kinet. Relat. Models **2** (2009), no. 4, 707–725. 9

[18] F. Golse et L. Saint-Raymond, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field*, J. Math. Pures et Appl. **78** (1999), 791–817. 9, 10

[19] E. Grenier, *Pseudo-differential energy estimates of singular perturbations,* Comm. Pure Appl. Math. **50**, no. 9 (1997), 821–865. 9

[20] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. 3

[21] M. Hauray et A. Nouri, *Well-posedness of a diffusive gyro-kinetic model*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **28** (2011), no. 4, 529–550. 9

[22] R. Ignat et R. Moser, *Interaction energy of domain walls in a nonlocal Ginzburg-Landau type model from micromagnetics*, Arch. Ration. Mech. Anal. **221**, no. 1 (2016), 419–485.

[23] R. Ignat et F. Otto, *A compactness result in thin-film micromagnetics and the optimality of the Néel wall*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (4) (2008), 909–956. 13

[24] R. Ignat, F. Otto, *A compactness result for Landau state in thin-film micromagnetics*, Ann. I. H. Poincaré **28** (2011), 247–282. 13

[25] R. Klein, A. Majda et K. Damodaran, *Simplified equations for the interaction of nearly parallel vortex filaments*, J. Fluid Mech. **288** (1995), 201–248. 11

[26] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega, *On the interaction of nearly parallel vortex filaments*, Commun. Math. Phys. **243** (2003), 471–483. 11

[27] C. Lacave, *Uniqueness for two dimensional incompressible ideal flow on singular domains*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), no. 2, 1615–1664. 3

[28] L. D. Landau et E. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sovietunion **8** (1935), 153–169. 13

[29] P. L. Lions et B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system,* Invent. Math. **105(2)** (1996), 415–430. 6, 8

[30] G. Loeper, *Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density*, J. Math. Pures Appl. (9) **86** (2006), no. 1, 68–79. 7, 11

[31] C. Marchioro, *On the Euler equations with a singular external velocity field*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **84** (1990), 61–69. 6

[32] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *On the vortex-wave system*, in Mechanics, analysis, and geometry : 200 years after Lagrange, pp. 79–95, M. Francaviglia (ed), Elsevier Science, Amsterdam, 1991. 4

[33] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag, New York, 1994. 3, 4

[34] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, Jour. Diff. Eq. **95** (1992), 281–303. 6, 8

[35] F. Poupaud, *Diagonal defect measures, adhesion dynamics and Euler equation*, Methods and Appl. of Analysis **9** (2002), no. 4, 533–562. 2, 10

[36] S. Okabe et T. Ukai, *On classical solutions in the large in time of the two-dimensional Vlasov equation*, Osaka J. Math **15** (1978), 245–261. 6

[37] L. Saint-Raymond, *Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation*, J. Math. Pures Appl. (9) **81** (2002), no. 4, 379–399. 9

[38] S. Schochet, *The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation*, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 5–6, 1077–1104. 2, 9

[39] V. N. Starovoitov, *Solvability of the problem of motion of concentrated vortices in an ideal fluid,* Dinamika Sploshn. Sredy **85** (1988), 118–136. 4

[40] V. N. Starovoitov, *Uniqueness of a solution to the problem of evolution of a point vortex,* Siberian Mathematical Journal **35** (1994), 625–630. 4

[41] D. Wang et C. Yu, *Global weak solution to the inhomogeneous Navier–Stokes–Vlasov equations*, Journal of Differential Equations **259**, no. 8 (2015), 3976–4008. 10

[42] Yudovich V. I., Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid, *Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz.* 3 (1963), pp. 1032-1066 (in Russian). English translation in *USSR Comput. Math. & Math. Physics* 3 (1963), pp. 1407–1456. 2

[43] V. E. Zakharov, *Wave collapse*, Sov. Phys. Usp. **31** (1988), no. 7, 672–674. 12