UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
D. Piau, L. Coquille

Année 2017
M1 – MAT414

Processus stochastiques – Contrôle continu

27 mars 2017

1 Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Question 1.1. Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $G_X(s) = \mathbb{E}(s^{X_1})$ leur fonction génératrice commune, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ et dont la fonction génératrice est G_N. Montrer que la fonction génératrice de $S = X_1 + \cdots + X_N$ est donnée par

$$G_S = G_N \circ G_X \,.$$

Question 1.2. Une poule pond N œufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf éclôt avec probabilité p indépendamment des autres. Soit K le nombre de poussins. Quelle est la distribution de K ?

2 Martingales et processus markoviens

Rappel : On dit qu'un processus $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est markovien si pour tous $x_i \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

1. Donner un exemple de processus markovien qui n'est pas une martingale.
2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $\{-1, 1\}$, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la marche aléatoire simple symmétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. Soit τ le temps du deuxième retour en zéro de S_n. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ la filtration donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $R_n = S_{\min\{\tau, n\}}$.
   (a) Montrer que τ est un temps d'arrêt.
   (b) Montrer que R_n est une martingale.
   (c) Montrer que R_n n'est pas un processus markovien.

3 Temps d'apparition d'une séquence

Question 3.1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli, c'est-à-dire telles que $\mathbb{P}(U_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_i = 0)$. Soit $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 : U_n = 1\}$ et $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : U_n = 0\}$.

1. Quelle est la loi de τ_1 ?
2. Quelle est la loi de τ_0 ?
3. Quelle est la loi de la première apparition de la séquence 10 ?

4 Polynômes en la marche aléatoire qui sont des martingales

Question 4.1.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $\{-1,1\}$, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la marche aléatoire simple symmétrique sur $\mathbb{Z}$ partant de 0. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ la filtration canonique donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Soit $\theta > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{\theta X_i}/\cosh\theta\right) = 1$ pour tout $i \geq 1$.
2. Montrer que $M_n^\theta := e^{\theta S_n}/(\cosh\theta)^n$ est une martingale.
3. Soit le développement de M_n^θ en puissances de θ :

$$M_n^\theta = \sum_{k\geq 0} \theta^k P_k(S_n, n).$$

   Montrer que pour tout $k \geq 0$, le polynôme $P_k(S_n, n)$ est une martingale.
4. Calculer P_k pour $k = 0, 1, ..., 5$.