CC - ProSto - 2017 - Correction

[1] $(X_i)_{i\geq 1}$ iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ (H1)

$N \perp\!\!\!\perp (X_i)_i$ " " " $\mathbb{N}$ (H2)

$$G_S(s) = \mathbb{E}(s^S) = \mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_N}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_N} \mid N))$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n} \mid N=n)}\mathbb{P}(N=n) = G_N(G_X(s)).$$

$$= \mathbb{E}(s^{X_1+\dots+X_n}) \quad \text{par } H2$$

$$= \mathbb{E}(s^{X_1})^n \quad \text{par } H1$$

Application: $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $K = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$G_N(s) = \sum_{n\geq 0} s^n\, \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 0} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

$$G_X(s) = (1-p) + sp$$

$$\Rightarrow G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(1-p+sp-1)} = e^{\lambda p(s-1)}$$

$$\Rightarrow K \sim \text{Poisson}(\lambda p)$$

---

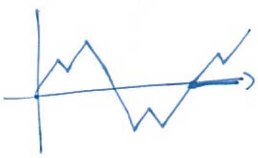
[2] 1. Une marche aléatoire biaisée est un processus Markovien qui n'est pas une martingale.

2. τ temps de deuxième retour en 0 de la marche aléatoire $(S_n)_n$

a) $$\{\tau = n\} = \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{S_n = 0\}}} \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} \Big(\underset{\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{S_k = 0\}}} \cap \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \underset{\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{S_i \neq 0\}}} \Big) \in \mathcal{F}_n$$ donc τ est un temps d'arrêt.

b) $R_n = S_{\tau\wedge n}$ est une martingale:

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ $(\mathcal{F}_n)_n \uparrow \mathcal{F}$



• $(R_n)_n$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_n$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \{R_n = k\} = \Big(\underbrace{\{S_{\tau\wedge n} = k\} \cap \{\tau \leq n\}}_{\bigcup_{t=0}^{n} \left(\underset{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{S_t = k\}}} \cap \underset{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{\tau = t\}}}\right)}\Big) \cup \Big(\underbrace{\{\underset{S_n}{S_{\tau\wedge n}} = k\} \cap \{\tau > n}_{\in \mathcal{F}_n}\Big)$$

On a montré: soit $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\ \forall n\}$

alors τ est un temps d'arrêt

n " " " "

$\Rightarrow \tau\wedge n$ " " " et R_n est $\underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\mathcal{F}_{\tau\wedge n}}}$ mesurable

cf. feuille d'exo 2.

- R_n est intégrable: $|R_n| = |S_{\tau\wedge n}| < n \Rightarrow \mathbb{E}(|R_n|) < n$.
- $\mathbb{E}(R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_{\tau\wedge(n+1)} (\mathbb{1}_{\tau\leq n} + \mathbb{1}_{\tau>n}) \mid \mathcal{F}_n)$

$$= \mathbb{E}(S_\tau \mathbb{1}_{\tau\leq n} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(S_{n+1} \mathbb{1}_{\tau>n} \mid \mathcal{F}_n)$$

$\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$
S_τ est $\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_n$-mes

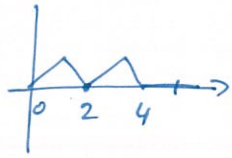
$$= \mathbb{1}_{\tau\leq n}\, S_\tau + \mathbb{1}_{\tau>n}\, \underbrace{\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{S_n}$$

$$= S_{\tau\wedge n} = R_n.$$

car S_n est une martingale.

c) R_n n'est pas markovien. Par exemple:

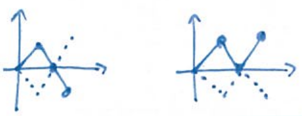
$$\mathbb{P}_0(R_5 = 0 \mid R_4 = 0, R_3 = 1, R_2 = 0, R_1 = 1) = 1$$



$$\neq \mathbb{P}_0(R_5 = 0 \mid R_4 = 0) =$$

$$\underbrace{\mathbb{P}_0(R_5 = 0 \mid R_4 = 0 \cap \overbrace{\{\exists i\in[\![1,3]\!] : R_i = 0\}}^{=:Z})}_{=1}\, \mathbb{P}_0(Z) + \underbrace{\mathbb{P}_0(R_5=0 \mid R_4 = 0 \cap Z^c)}_{=0} \cdot \mathbb{P}_0(Z^c$$

$$= \mathbb{P}_0(Z) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$



$\boxed{3}$ $(U_i)_i$ iid avec $U_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $\tau_i = \inf\{n\geq 1 : U_n = i\}$, $i\in\{0,1\}$

1. $\mathbb{P}(\tau_1 = k) = \mathbb{P}(U_1 = 0, \dots, U_{k-1} = 0, U_k = 1)$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} (1-p)^{k-1} p \quad \text{donc } \tau_1 \sim \text{Geom}(p).$$

2. Idem $\tau_0 \sim \text{Geom}(1-p)$.

3. Soit $\tau = \inf\{n\geq 1 : U_{n-1} = 1, U_n = 0\}$.

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \mathbb{P}\Big(\biguplus_k \{U_1 = 0, \dots, U_k = 0, U_{k+1} = 1, \dots, U_{n-1} = 1, U_n = 0\}\Big)$$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^{k+1} p^{n-(k+1)} = p^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+1}}_{= \left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)}\right)}$$

autre méthode: par la propriété de Markov forte,

$\tau = \tau_1 + \tau_0'$ avec $\tau_0' = \inf\{n > \tau_1 : U_n = 0\} \overset{\text{loi}}{=} \tau_0$ et $\tau_0' \perp\!\!\!\perp \tau_1$

donc

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\tau_1 = k, \tau_0' = n-k)$$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(1-p)^{k-1} p\, p^{n-k-1} (1-p)}_{p^{n-k}(1-p)^k} = \dots$$

$\boxed{4}$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $(X_i)_i$ iid $X_i \sim Unif\{-1,+1\}$, $\theta > 0$.

1. $\mathbb{E}(e^{\theta X_i} / \cosh(\theta)) = \frac{1}{ch(\theta)}\left(e^{-\theta}\frac{1}{2} + e^{+\theta}\frac{1}{2}\right) = 1$.

2. $M_n^\theta = e^{\theta S_n}/ch(\theta)^n$ est une martingale: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

- M_n^θ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable $\forall n$ (car S_n l'est).
- M_n^θ est intégrable : $|M_n^\theta| < \frac{e^{\theta n}}{ch(\theta)^n} < \infty$. $\Rightarrow \mathbb{E}(|M_n^\theta|) < \infty$.
- $\mathbb{E}(M_{n+1}^\theta \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{(ch\theta)^{n+1}} \underbrace{\mathbb{E}(e^{\theta(X_1 + \dots + X_n)} e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)}_{= e^{\theta(X_1+\dots+X_n)} \underbrace{\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)}_{= \mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}}) = ch(\theta)}}$

car $\sum^n X_i$ $\mathcal{F}_n$ - mes

car $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$.

car $(X_i)_i$ i

$$= \frac{e^{\theta S_n}}{ch(\theta)^n}.$$

3. Soit $(P_k)_k$ tq $M_n^\theta = \sum_{k \geq 0} \theta^k P_k(S_n, n)$. $(*)$

alors $P_k(S_n, n)$ est une martingale: • $\mathcal{F}_n$ - mesurable car fonction de.

• intégrable car $E|M_n^\theta| \leq \sum_k \theta^k E|P_k(S_n,n)| < \infty$

- $E(M_n^\theta \mid \mathcal{F}_{n-1}) =$

$= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \theta^k P_k(S_n, n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)$

$\overset{TCD}{=} \sum_{k \geq 0} \theta^k \, \mathbb{E}(P_k(S_n, n) \mid \mathcal{F}_{n-1})$.

par convergence absolue de $(*)$ dans le rayon de convergence.

d'autre part $\mathbb{E}(M_n^\theta \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}^\theta \overset{(*)}{=} \sum_{k\geq 0} \theta^k P_k(S_{n-1}, n-1)$

on conclut par unicité du développement.

4. Calcul des premiers termes: $M_n^\theta = e^{\theta S_n - n \log ch\theta}$

or $e^{\theta S_n} = \sum_{j \geq 0} \frac{(\theta S_n)^j}{j!} = 1 + \theta S_n + \theta^2 \frac{S_n^2}{2} + \frac{\theta^3 S_n^3}{6} + O(\theta^4)$

$\log ch(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$

$\Rightarrow e^{-n\log ch(\theta)} = \sum_{j\geq 0} \frac{(-n \log ch(\theta))^j}{j!} = 1 - n\log ch(\theta) + O(\theta^4)$

$= 1 - n\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$

$$\Rightarrow M_n^\theta = \underbrace{1}_{P_0} + \theta \underbrace{S_n}_{P_1} + \theta^2 \underbrace{\left(\frac{S_n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)}_{P_2} + \theta^3 \underbrace{\left(\frac{S_n^3}{6} - \frac{n S_n}{2}\right)}_{P_3} + O(\theta^4)$$