Université de Grenoble **Année 2015-2016**
Master M1 Mathématiques **Processus stochastiques**

Examen du vendredi 20 mai 2016

Tous les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. On demande de numéroter soigneusement les réponses aux questions.

Exercice A – On considère des variables aléatoires L et $(L_k^{(n)})_{n\geqslant 1,k\geqslant 1}$ i.i.d., de carré intégrable, à valeurs entières positives ou nulles, de moyenne $E(L) = \mu > 0$ et de variance $\sigma^2 = \text{var}(L)$, et on définit un processus de branchement $(X_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = L_1^{(n+1)} + \cdots + L_{X_n}^{(n+1)}.$$

On note enfin, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n), \qquad M_n = \mu^{-n} X_n.$$

(1) Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

(2) Montrer que $E(M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) = Q(Z_n)$ pour un polynôme Q dépendant de μ et σ^2 que l'on précisera.

(3) En déduire que la suite (M_n) est bornée dans L^2 si et seulement si $\mu > 1$.

(4) Si $\mu > 1$, déduire de ce qui précède que M_n converge presque sûrement vers une limite M_∞ et calculer la variance de M_∞.

Exercice B – Soit $0 < p < 1$ et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche au hasard sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geqslant 1$, où la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est i.i.d. de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$.

(5) Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov, dont on précisera la distribution initiale et la matrice de transition.

(6) Calculer la loi de S_n pour tout $n \geqslant 1$. On pourra montrer que cette loi s'écrit $(\frac{1}{3} - a_n - b_n)\delta_0 + (\frac{1}{3} + a_n)\delta_1 + (\frac{1}{3} + b_n)\delta_2$, pour des nombres réels a_n et b_n que l'on calculera par récurrence.

(7) Montrer que (S_n) admet une unique loi stationnaire π, que l'on calculera.

(8) Montrer que la loi de S_n converge vers π quand $n \to \infty$ et préciser la vitesse de cette convergence.

(9) Soit $R = \inf\{n \geqslant 1 \mid S_n = 0\}$ le premier temps de retour en 0. Déduire de ce qui précède, et sans calculs, la valeur de $E(R)$.

T.S.V.P.

Exercice C – Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable.

(10) Montrer que
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(X, E(Y \mid X)).$$

(11) Préciser si on peut « itérer » ce résultat pour en déduire que
$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(E(X \mid Y), E(Y \mid X)).$$

Exercice D – Paul et Tatiana disputent un match décomposé en sets. Le gagnant du match est le premier joueur à avoir gagné deux sets de plus que l'adversaire. Chaque set est remporté par Paul avec probabilité p et par Tatiana avec probabilité $t = 1 - p$, indépendamment des autres sets.

(12) Montrer que la différence entre le nombre de sets gagnés par Paul et le nombre de sets gagnés par Tatiana au temps n est une chaîne de Markov, dont on précisera l'espace d'états et les transitions.

(13) Calculer la probabilité que Tatiana remporte le match.

(14) Calculer le nombre moyen de sets disputés.

Exercice E – Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi de Poisson de paramètre Y.

(15) Calculer $E(Y)$, $E(X \mid Y)$ et en déduire $E(X)$.

(16) Déterminer la loi de X.

(17) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.

Exercice F – Soient X et $(X_n)_{n \geqslant 0}$ des variables aléatoires entières i.i.d. Pour tout entier k, on note $p_k = P(X_1 = k)$. Soit
$$N = \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n = X_0\}.$$

(18) Montrer que N est un temps d'arrêt presque sûrement fini, pour une filtration que l'on précisera.

(19) Calculer $E(N)$. Préciser les lois (p_k) telles que N est intégrable.

Exercice G – Soit (X, Y) un couple aléatoire de distribution uniforme sur le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(2, 1)$.

(20) Calculer $E(X \mid Y)$ et $E(X^2 \mid Y)$.

(21) Réaliser (X, Y) à partir de variables aléatoires (U, V, W) i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$, c'est-à-dire trouver des fonctions g et h telles que les lois de $(g(U, V, W), h(U, V, W))$ et (X, Y) coïncident.

Fin.