CC - ProSto - 2015/2016 - correction

① Espérance conditionnelle

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ sous tribus de $\mathcal{F}$

$X_1 = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)$, $X_2 = \mathbb{E}(X / \mathcal{F}_2)$

1) $\mathbb{E}(XX_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XX_1 \mid \mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X_1 \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X_1^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}((X-X_1)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_1^2) \\ \mathbb{E}((X-X_2)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X_2^2) \\ \mathbb{E}((X_2-X_1)^2) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_1^2) \end{cases}$$

$X_1 = \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{F}_1)$ (tower property)

$\Rightarrow \mathbb{E}((X-X_2)^2) + \mathbb{E}((X_2-X_1)^2) = \mathbb{E}((X-X_1)^2)$

thm de Pythagore pour $X, X_1, X_2 \in L^2(\mathcal{F})$.

2) Fait en TD.

3) $(Y_i)_i$ iid, $\mathbb{E}(Y_i) = \mu$, $Var(Y_i) = \sigma^2$

$N \perp\!\!\!\perp (Y_i)_i$, $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$.

On applique le point précédent avec $\mathcal{F}_1 = \sigma(N)$:

$\mathbb{E}(X \mid N) = \mu N$

$$\mathbb{E}(X^2 \mid N) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{N} Y_i\Big)^2}_{\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 + \sum_{i \neq j} Y_i Y_j} \mid N\Big) = N\sigma^2 + N^2\mu^2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} Var(X) = \mathbb{E}(Var(X \mid \mathcal{F}_1)) + Var(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1))$$
$$= \mathbb{E}(N\sigma^2 + N^2\mu^2 - N^2\mu^2) + Var(\mu N)$$
$$= \mathbb{E}(N)\sigma^2 + \mu^2 Var(N).$$

4) a) Conditionnellement à $\{N=n\}$, $X \sim$ Binomiale$(n, \frac{1}{2})$

b) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid N)) = \mathbb{E}(N\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \boxed{\frac{7}{4}}$

c) $Var(X) \overset{(3)}{=} \underbrace{\mathbb{E}(N)}_{\frac{7}{2}} \underbrace{\sigma^2}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\mu^2}_{\frac{1}{4}} \underbrace{Var(N)}_{\frac{35}{12}} = \boxed{\frac{77}{48}}$.

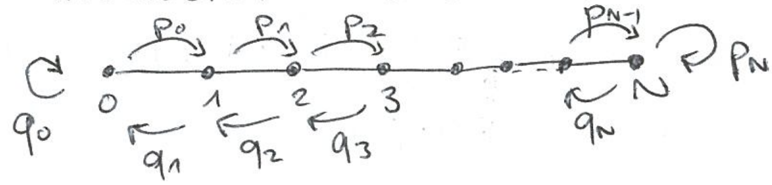
car $N \sim unif_{\{1,2,\dots,6\}}$.

(2) Réversibilité

1) $(\mu Q)_i = \sum_{j\in E} \mu_j Q_{ji} \overset{\text{rev.}}{=} \sum_{j\in E} \mu_i Q_{ij} = \mu_i \overbrace{\sum_{j\in E} Q_{ij}}^{1} = \mu_i$

donc $\mu Q = \mu$. L'unicité de la mesure stationnaire découle de l'irréductibilité et de $|E|<\infty$.

2). a)



b) On cherche μ tq $\mu_i Q_{ij} = \mu_j Q_{ji}$:

$$\mu_i \underbrace{Q_{i,i+1}}_{p_i} = \mu_{i+1} \underbrace{Q_{i+1,i}}_{q_{i+1}} \Rightarrow \boxed{\mu_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} \mu_i = \ldots = \frac{p_i p_{i-1} \cdots p_0}{q_{i+1} q_i \cdots q_1} \mu_0}$$

et $\sum_{i=0}^{N} \mu_i = 1 \Rightarrow \mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} \mu_0 \frac{p_{i-1}\cdots p_0}{q_i \cdots q_1}$

$$\Rightarrow \mu_0 (1 + \Sigma \ldots) = 1 \Rightarrow \boxed{\mu_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i-1}\cdots p_0}{q_i \cdots q_1}} = \frac{q_1 \cdots q_N}{\sum_{i=0}^{N} p_0 \cdots p_i q_{i+1} \cdots q}}$$

c) Si $p_i = p$ $\forall i \in E$ alors $\boxed{\mu_{i+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} \mu_0}$

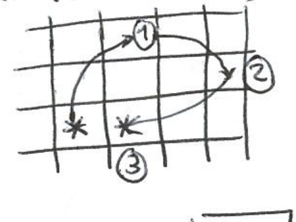
$$\mu_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{p}{q}\right)^i}_{\frac{1-(p/q)^{N+1}}{1-p/q}} = 1 \Rightarrow \boxed{\mu_0 = \frac{1-p/q}{1-(p/q)^{N+1}}}$$

3) a) Montrons que $\pi_i = \frac{d_i}{2|A|}$ est réversible:

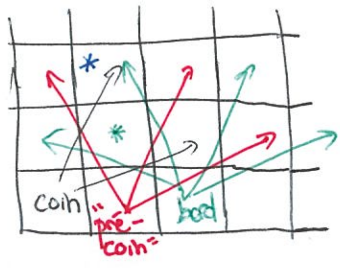
$$\pi_i Q_{ij} = \frac{d_i}{2|A|} \frac{1}{d_i} = \frac{1}{2|A|} = \frac{d_j}{2|A|} \frac{1}{d_j} = \pi_j Q_{ji}$$

De plus π_i est bien une mesure de proba car $\sum_{i\in E} \pi_i = \sum_i \frac{d_i}{2|A|} = 1$ car chaque arête est comptée 2 fois dans la somme

b) i) On voit facilement qu'on peut passer de la case (i,j) à la case $(i+1,j)$ en trois coups (même sur les bords) :



ii) $\mathbb{E}_{coin}(T_{coin}) = \frac{1}{\pi_{coin}} = \frac{\sum_{i\in E} d_i}{d_{coin}} \left(= \frac{2|A|}{d_{coin}}\right)$



$= (4\cdot 2 + 8\cdot 3 + 20\cdot 4 + 16\cdot 6 + 16\cdot 8)/2 = \boxed{168}$

4 coins — degré des coins — 8 pré-coins — degré des pré-coins — 16+4 bords/* — degré bord/* — degré des bords intérieurs * — degré du bulk "="