**Devoir surveillé du lundi 29 avril 2010 (durée 1 heure 30).**

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *notes personnelles de cours et de travaux dirigés.*

**Exercice 1.**

Une machine tombe en panne à des temps aléatoires $T_1 \leq T_2 \leq \cdots$. Quand elle tombe en panne, on la remplace immédiatement par une machine similaire en état de marche. Les temps d'attente $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ entre deux pannes successives sont stochastiquement indépendants. En d'autres termes, on considère une suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires positives identiquement distribuées de même loi $\mu$. Les temps où se produisent les pannes sont alors donnés par $T_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$, $n = 1, 2, \cdots$. Pour tout $t > 0$, soit

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

la variable aléatoire comptant le nombre de pannes dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On suppose que $\Delta_1$ est intégrable et que $m = \mathbb{E}[\Delta_1] = \int_0^\infty \delta \, \mathrm{d}\mu(\delta) > 0$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} = \frac{1}{m} . \qquad (1)$$

1. Vérifier que (1) est vrai dans le cas où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson, c'est-à-dire, si $\mu$ est une loi exponentielle (on pourra utiliser les résultats établis en Travaux Dirigés).

2. On s'intéresse à présent au cas où la loi $\mu$ est quelconque. Montrer que $N_t + 1$ est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

3. Montrer que $t < T_{N_t+1}$ si $t \geq 0$. En déduire grâce à l'identité de Wald que $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \geq \frac{1}{m}$.

4. Soit $a > 0$. On introduit les temps d'attente tronqués $\Delta_n^{(a)} = \min\{\Delta_n, a\}$ et on pose comme précédemment

$$T_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_n^{(a)} \quad , \quad N_t^{(a)} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n^{(a)} \leq t\}} \quad \text{et} \quad m_a = \mathbb{E}[\Delta_1^{(a)}] \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } t \geq 0.$$

   Montrer que $T^{(a)}_{N_t^{(a)}+1} \leq t + a$. En déduire à l'aide de l'identité de Wald que $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \leq \frac{1}{m_a}$.

5. Montrer que $\lim\limits_{a\to\infty} m_a = m$. En conclure que (1) est vrai. Que se passe t'il si $m = 0$ ?

**Exercice 2.**

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$ martingale bornée dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ (c'est-à-dire telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$).

1. On pose $X_{n,m} = \max\{M_{n+m}, 0\}$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que $(X_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$-sous-martingale bornée dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

2. Montrer que $\mathbb{E}[X_{n,m+1}|\mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. En déduire que les limites $Y_n = \lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n]$ existent $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale positive et bornée dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

4. Montrer que $M_n = Y_n - Z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingales positives et bornées dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ (décomposition de Krickeberg).