Master 1 Mathématiques, MAT414 Université Joseph Fourier
2009-2010

Corrigé du devoir surveillé du 29 avril 2010

Exercice 1.

1. Si $\mathrm{d}\mu(\delta) = \lambda\, e^{-\lambda\delta} 1_{\{\delta\geq 0\}}\, \mathrm{d}\delta$ alors $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson et les variables aléatoires N_t, $t > 0$, suivent des lois de Poisson de paramètres λt (cf. exercice 6, feuille de TD 2). Ainsi, $\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t$. De plus, $m = \mathbb{E}[\Delta_1] = \lambda \int_0^{\infty} \delta\, e^{-\lambda\delta}\, \mathrm{d}\delta = 1/\lambda$. D'où
$$\frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} = \frac{1}{m} \quad \text{pour tout } t > 0.$$
En particulier, l'égalité (5) ci-dessous est bien vérifiée.

2. Il est clair que $N_t + 1$ est une variable aléatoire entière strictement positive. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, alors
$$\big\{N_t + 1 = n\big\} = \big\{N_t = n-1\big\} = \big\{T_{n-1} \leq t < T_n\big\}\,. \tag{1}$$
Puisque $T_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$ est $\mathcal{F}_n^\Delta$-mesurable, T_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}^\Delta$-mesurable et $\mathcal{F}_{n-1}^\Delta \subset \mathcal{F}_n^\Delta$, on en déduit que $\{N_t + 1 = n\} \in \mathcal{F}_n^\Delta$. Donc $N_t + 1$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

3. D'après (1) on a $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$. On rappelle si $T_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$ où $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de variables aléatoires positives, intégrables, indépendantes et identiquement distribuées et si $N_t + 1 \geq 1$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini de $(\mathcal{F}_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, alors
$$\mathbb{E}[T_{N_t+1}] = \mathbb{E}[\Delta_1]\, \mathbb{E}[N_t + 1] \qquad \text{(identité de Wald).} \tag{2}$$
Notons que cela est vrai même si $N_t + 1$ n'est pas intégrable (pourvu que $\Delta_k \geq 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star$). Dans notre problème, $N_t + 1 < \infty$ p.s. car l'événement $A = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{T_n \leq t\} = \{\sum_{k=1}^\infty \Delta_k \leq t\}$ est de probabilité nulle (en effet, $A \subset B = \{\omega \in \Omega; \lim_{k\to\infty} \Delta_k(\omega) = 0\}$ donc $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. De plus, $B = \cap_{j\in\mathbb{N}^\star} \cup_{k_0\in\mathbb{N}^\star} \cap_{k\geq k_0} \{\Delta_k \leq 1/j\}$. Puisque $m > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mu([0, 1/j]) < 1$ et donc $\mathbb{P}(B) = \lim_{j\to\infty} \lim_{k_0\to\infty} \prod_{k\geq k_0} \mu([0, 1/j]) = 0$). Il découle de ce que précède :
$$\frac{\mathbb{E}[N_t] + 1}{t} = \frac{\mathbb{E}[T_{N_t+1}]}{t\, m} \geq \frac{1}{m} \quad \forall\ t > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \geq \frac{1}{m}\,. \tag{3}$$

4. Soit $a > 0$ et $\Delta_k^{(a)} = \min\{\Delta_1, a\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. En reprenant les arguments employés dans les questions 2 et 3, on montre que $N_t^{(a)} + 1$ est un temps d'arrêt p.s. fini pour $(\mathcal{F}_n^{\Delta^{(a)}})_{n\in\mathbb{N}^\star} = (\mathcal{F}_n^\Delta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et que $T^{(a)}_{N_t^{(a)}} \leq t$. Il s'ensuit que
$$T^{(a)}_{N_t^{(a)}+1} = T^{(a)}_{N_t^{(a)}} + \Delta^{(a)}_{N_t^{(a)}+1} \leq t + a$$
car $\Delta_k^{(a)} \leq a$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. De plus, $(\Delta_k^{(a)})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de variables aléatoires positives, intégrables et i.i.d. et l'on peut appliquer à nouveau l'identité de Wald. Cela donne
$$\mathbb{E}\big[T^{(a)}_{N_t^{(a)}+1}\big] = m_a\, \mathbb{E}\big[N_t^{(a)} + 1\big] \ \leq\ t + a \quad , \quad m_a = \mathbb{E}\big[\Delta_1^{(a)}\big]\,.$$
Mais $\Delta_k^{(a)} \leq \Delta_k$ et donc $T_n^{(a)} \leq T_n$ pour tout k et tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Par conséquent, $N_t^{(a)} \geq N_t$ pour tout $t > 0$. On en conclut que
$$\frac{\mathbb{E}[N_t] + 1}{t} \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^{(a)}] + 1}{t} \leq \frac{t + a}{t\, m_a} \quad \forall\ t > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \leq \frac{1}{m_a}\,. \tag{4}$$

5. $\Delta_1^{(a)}(\omega) = \min\{\Delta_1(\omega), a\}$ est positif, croît avec a et tend vers $\Delta_1(\omega)$ quand $a \to \infty$ pour presque tout $\omega \in \Omega$ (car $\Delta_1(\omega) < \infty$). En vertu du théorème de la convergence monotone, $m_a = \mathbb{E}[\Delta_1^{(a)}]$ converge vers $m = \mathbb{E}[\Delta_1]$ quand $a \to \infty$ (notons que cela reste vrai si $m = \infty$). En prenant cette limite dans (4), on obtient $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}[N_t]/t \leq 1/m$. En combinant ce résultat avec celui de la question 3, il vient
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} = \frac{1}{m} \,. \tag{5}$$
Il s'agit du *théorème élémentaire des processus de renouvellement*.
Si $m = 0$ alors $\Delta_k = 0$ et $T_n = 0$ p.s. pour tout k et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, donc $N_t = \infty$ p.s. pour tout $t > 0$.
Si $m = \infty$, on ne peut plus appliquer l'identité de Wald dans la question 3 car Δ_1 n'est pas intégrable. Cependant, comme $\Delta_1^{(a)}$ est intégrable pour tout $a > 0$ le résultat de la question 4 s'applique toujours. De plus $m_a \to \infty$ quand $a \to \infty$. En faisant tendre $a \to \infty$ dans (4) et en se rappelant que $\mathbb{E}[N_t] \geq 0$, on obtient directement (5) avec $1/m = 0$.

Exercice 2.

1. On pose $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\,|M_n|\,] < \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{n,m} = \max\{M_{n+m}, 0\}$ est $\mathcal{F}_{n+m}$-mesurable (c'est la composée d'une fonction borélienne et de la variable aléatoire M_{n+m}, qui est $\mathcal{F}_{n+m}$-mesurable car $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale). Comme $0 \leq X_{n,m} \leq |M_{n+m}|$, on a
$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[|X_{n,m}|\big] \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[|M_{n+m}|\big] \leq C \,. \tag{6}$$
Il en découle que la suite $(X_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1. En particulier, les variables aléatoires $X_{n,m}$ sont intégrables. Puisque $x \in \mathbb{R} \mapsto x_+ = \max\{x, 0\}$ est convexe, l'inégalité de Jensen donne
$$\mathbb{E}[X_{n,m+1}|\mathcal{F}_{n+m}] = \mathbb{E}[(M_{n+m+1})_+|\mathcal{F}_{n+m}] \geq \mathbb{E}[M_{n+m+1}|\mathcal{F}_{n+m}]_+ = (M_{n+m})_+ = X_{n,m} \tag{7}$$
(on a utilisé le fait que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale dans la seconde égalité). Ceci montre que $(X_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$-sous-martingale bornée dans L^1.

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. En utilisant (7), $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+m}$ et $X_{n,m} \geq 0$, il vient
$$\mathbb{E}[X_{n,m+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{n,m+1}|\mathcal{F}_{n+m}]\big|\mathcal{F}_n\big] \geq \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n] \geq 0 \,.$$
La suite $(\mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n])_{m\in\mathbb{N}}$ est donc positive et croissante. Par conséquent, elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire
$$Y_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n] \;\in\; [0, \infty] \,.$$
En vertu du théorème de la convergence monotone et de (6),
$$\mathbb{E}[Y_n] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n]\,\big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[X_{n,m}\big] \leq C \,.$$
Ainsi, Y_n est intégrable et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\,|Y_n|\,] \leq C < \infty$.

3. Nous venons de voir que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n est donc intégrable. Comme Y_n est la limite simple des variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurables $\mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n]$, Y_n est également $\mathcal{F}_n$-mesurable. Il est clair que $Y_n \geq 0$ car $\mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n] \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. D'après la question 2 et le théorème de la convergence monotone sur les espérances conditionnelles, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Y_{n+1}\big|\mathcal{F}_n\big] &= \mathbb{E}\big[\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_{n+1,m}|\mathcal{F}_{n+1}]\,\big|\mathcal{F}_n\big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{n+1,m}|\mathcal{F}_{n+1}]\,\big|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[X_{n+1,m}\,\big|\mathcal{F}_n\big] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[X_{n,m+1}\,\big|\mathcal{F}_n\big] = Y_n \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$
car $X_{n+1,m} = (M_{n+1+m})_+ = X_{n,m+1}$. On en conclut que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale positive bornée dans L^1.

4. Posons $Z_n = Y_n - M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la différence de deux $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingales, c'est aussi une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale. De plus $\mathbb{E}[\,|Z_n|\,] \leq \mathbb{E}[\,|Y_n|\,] + \mathbb{E}[\,|M_n|\,] \leq 2C$, donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1. Il reste à montrer que Z_n est positive. Par l'inégalité de Jensen, $Y_n = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[(M_{n+m})_+\big|\mathcal{F}_n\big] \geq \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[M_{n+m}\big|\mathcal{F}_n\big]_+$. Mais $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, de sorte que $\mathbb{E}[(M_{n+m})|\mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $Y_n \geq (M_n)_+$, d'où
$$Z_n \geq (M_n)_+ - M_n \geq 0 \quad \text{p.s..} \tag{8}$$
Ceci prouve que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale positive et bornée dans L^1, et il en est de même pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après la question 3.