Master 1 Mathématiques, MAT414 — Université Joseph Fourier, 2007-2008

Devoir surveillé du lundi 17 mars 2008 (durée : 2 heures)

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *polycopié de cours, notes de cours et de travaux dirigés.*

Barême indicatif : *exercice 1 : 4 points, exercice 2 : 5 pts, exercice 3 : 5 pts, exercice 4 : 6 pts.*

Les 4 exercices sont indépendants. Pour tout $I \subset \mathbb{R}$, on note 1_I la fonction indicatrice de I, définie par $1_I(x) = 1$ si $x \in I$ et $1_I(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus I$.

Exercice 1.

Soit $a, b, \lambda > 0$. Soit U et V deux variables aléatoires réelles positives indépendantes de lois admettant les densités ρ_U et ρ_V (par rapport à la mesure de Lebesgue) données par :

$$\rho_U(u) = \frac{\lambda^{-a}}{\Gamma(a)}\, u^{a-1} e^{-u/\lambda}\, 1_{]0,\infty[}(u) \quad \text{et} \quad \rho_V(v) = \frac{\lambda^{-b}}{\Gamma(b)}\, v^{b-1} e^{-v/\lambda}\, 1_{]0,\infty[}(v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(on rappelle que $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$).

Calculer la densité de la loi du couple $(U+V, \frac{U}{U+V})$. Montrer que $U+V$ et $\frac{U}{U+V}$ sont indépendantes. Déterminer les densités des lois de ces variables aléatoires.

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit Y une variable aléatoire réelle admettant la densité conditionnelle sachant $X = x$ suivante :

$$f_{Y|X}(y|x) = (y-x)e^{-(y-x)}\, 1_{[x,\infty[}(y)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Enfin, soit Z une variable aléatoire réelle admettant la densité conditionnelle sachant $(X,Y) = (x,y)$ suivante :

$$f_{Z|X,Y}(z|x,y) = (y-x)e^{-z(y-x)}\, 1_{[0,\infty[}(z)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Donner la densité de la loi de (X,Y,Z). Déterminer la densité de la loi de Z.
2. Déterminer la densité de la loi de $(X, Y-X, Z(Y-X))$. Quelle indépendance remarque-t-on ? Donner les densités des lois de $Y-X$ et de $Z(Y-X)$.

Exercice 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$ un événement de probabilité $\mathbb{P}[A] > 0$.

1. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que
$$\mathbb{P}[G|A] = \frac{\int_G \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]\, \mathrm{d}\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}]\, \mathrm{d}\mathbb{P}} \qquad \text{pour tout } \; G \in \mathcal{G}\,. \tag{1}$$
2. Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par une partition dénombrable $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω vérifiant $\mathbb{P}[G_n] > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que dans ce cas (1) se réduit à la formule de Bayes
$$\mathbb{P}[G_n|A] = \frac{\mathbb{P}[A|G_n]\, \mathbb{P}[G_n]}{\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A|G_m]\, \mathbb{P}[G_m]} \qquad \text{pour tout } \; n \in \mathbb{N}\,.$$

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Pour tout $t \geq 0$, on pose $X_t = \min\{X, t\}$ et on note $\sigma(X_t)$ la tribu engendrée par X_t.

1. Montrer que si $0 \leq s \leq t$, alors $\sigma(X_s) \subset \sigma(X_t)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Déterminer $\mathbb{E}[f(X)|X_t]$ pour tout $t \geq 0$.