Université Joseph Fourier - M1 - 2016-2017

Examen session 2

16 mai 2017 - 1h30

De nombreuses questions sont indépendantes au sein du problème.

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Problème. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + av^2)) \end{aligned}$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. Montrer $(f, \mathbb{R}^2)$ est une surface paramétrée lisse régulière. On pose $S = f(\mathbb{R}^2)$.
3. On suppose dans cette question que $a = 1$.
   (a) Représenter l'intersection de S avec un plan affine horizontal (on pourra présenter différents cas).
   (b) Représenter l'intersection de S avec un plan affine parallèle à (Oxz).
   (c) Représenter S.
   (d) Soit D un disque fermée centrée en $(0,0)$, de rayon δ. Calculer l'aire de $f(D)$.
4. Déterminer la matrice de la première forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v).
5. (Cours) Montrer que
$$\forall (k,h) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle dN(u,v)(k), df(u,v)(h)\rangle + \langle N(u,v), d^2f(u,v)(h)(k)\rangle = 0$$
   où N est le vecteur normal unitaire associé à (f, U).
6. Déterminer la matrice de la seconde forme fondamentale de S dans la base (f'_u, f'_v).
7. Déterminer la courbure de Gauss K, en fonction des coordonnées (u,v).
   On suppose à partir de maintenant que $a = 1$.
8. Calculer les courbures principales k_1 et k_2.
9. Pour tout $p \in S$, on désigne par T_pS le plan tangent affine à S en p. Montrer que $T_pS \cap S = \{p\}$.
10. Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\forall M \in \mathbb{R}^3, g(x) = \|M - A\|^2$.
    (a) Que vaut $\sup_{M \in S} g$?
    (b) Montrer que la restriction $g_{|S}$ admet un minimum global.