Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle — Université Grenoble Alpes
2016-2017

Examen du 15 mai 2017

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 3 exercices indépendants.
Durée : 3 heures
Barême indicatif : exercice 1 : 8-10 points, exercice 2 : 3-4 points, exercice 3 : 8-10 points

Exercice 1 Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$ et $C \subset X$ un sous-ensemble *convexe, compact et non vide* de X. On appelle *point extrémal de* C un vecteur $e \in C$ tel que

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \big(\exists\, t \in]0,1[\,,\ tx + (1-t)y = e\big) \ \Rightarrow\ x = y = e\ .$$

On note $\mathcal{E}_C$ l'ensemble des points extrémaux de C. On rappelle que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(E) \subset X$ d'un sous-ensemble $E \subset X$ est le plus petit convexe contenant E. Le but de ce qui suit est de montrer que C est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : $C = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$.

1. Un sous-ensemble $E \subset C$ de C est dit *extrémal* si E est fermé, non vide et

$$\forall\, x, y \in C\ ,\ \big(\,\exists\, t \in]0,1[\,,\ tx + (1-t)y \in E\big) \ \Rightarrow\ x \in E, y \in E\ .$$

   (a) Montrer que si E et E' sont des sous-ensembles extrémaux de C, alors il en est de même pour $E \cup E'$et $E \cap E'$. Montrer que $\{e\}$ est un sous-ensemble extrémal de C si et seulement si e est un point extrémal de C.

   (b) Soit E un sous-ensemble extrémal de C et $f \in X'$ une forme linéaire bornée sur X. Montrer que

$$K_E = \big\{x \in E\ ;\ f(x) = \max_{e \in E} f(e)\big\}$$

   est un sous-ensemble extrémal de C.

   (c) Soit $K \subset C$ un sous-ensemble extrémal de C, supposé convexe. Montrer que $\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_C$.

   (d) Montrer que les points extrémaux du carré $C = [-1,1]^2$ dans $X = \mathbb{R}^2$ sont les sommets du carré et qu'un segment contenu dans C est un sous-ensemble extrémal de C si et seulement si c'est une arrête du carré. Énumérer sans démonstration tous les sous-ensembles extrémaux de C.

2. On suppose que X est un espace préhilbertien.
   On rappelle que le convexe $C \subset X$ est supposé compact.

   (a) Montrer que l'ensemble

$$\widetilde{C} = \overline{\mathrm{Conv}(\mathcal{E}_C)}$$

   est convexe, compact et inclu dans C.

   (b) Montrer que la fonction $x \in C \mapsto \|x\|$ atteint son maximum en un point $e \in C$ et que $e \in \mathcal{E}_C$. En déduire que $\mathcal{E}_C$ est non vide.
   Plus généralement, montrer que si $K \subset C$ est convexe, compact et est un sous-ensemble extrémal de C, alors K contient au moins un point extrémal de C.
   Indication : pour montrer que $e \in \mathcal{E}_C$, vous pourrez utiliser le résultat suivant, que vous justifierez : dans un espace préhilbertien X, pour tout $u, v \in X$, $v \neq 0$, on a

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \ \Leftrightarrow\ u = \lambda v \ \text{ avec }\ \lambda \geq 0\ .$$

   (c) On suppose que $C \setminus \widetilde{C} \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe une forme linéaire bornée $f \in X'$, $f \neq 0$ telle que l'ensemble

$$K_C = \big\{x \in C\ ;\ f(x) = \max_{y \in C} f(y)\big\}$$

   est disjoint de $\widetilde{C}$.

(d) Montrer que K_C est convexe et compact. Déduire des questions 1b) et 2b) que $K_C \cap \mathcal{E}_C \neq \emptyset$.

(e) En conclure que $C = \widetilde{C}$.

3. Dans toute la suite, on suppose que X est un espace vectoriel normé.

   (a) Soit E un sous-ensemble extrémal de C. Montrer que la famille $\mathcal{F}_E$ des sous-ensembles extrémaux de C inclus dans E, munie de la relation d'ordre
   $$J \leq K \text{ si et seulement si } J \supset K \ , \tag{1}$$
   admet un élément maximal M_1 (notez le sens de l'inclusion dans (1)).

   (b) Montrer que M_1 contient un seul élément.
   Indication : Supposer que M_1 contient deux éléments distincts et utiliser un corollaire du théorème de Hahn-Banach et la question 1b) pour en déduire une contradiction avec la maximalité de M_1.

   (c) Déduire des questions 1a) et 3b) que tout sous-ensemble extrémal E de C contient au moins un élément extrémal $e \in \mathcal{E}_C$.

   (d) En reprenant et adaptant si nécessaire les arguments des questions 2a), 2c) et 2e), montrer que $C = \widetilde{C}$.

Exercice 2 Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire, $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée maximale de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On rappelle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $f \in X'$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

1. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si $\forall\, y \in X$, $\lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
   (i) $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$;
   (ii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et pour tout $i \in I$, $\lim_{n\to\infty} \langle e_i, x_n \rangle = \langle e_i, x \rangle$;
   (iii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et il existe $M \subset X$ dense dans X tel que $\forall\ y \in M$, $\lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de X ($(e_i)_n = 1$ si $i = n$ et 0 sinon). Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $\lim_{n\to\infty} \langle e_i, x_n \rangle = \langle e_i, x \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Exercice 3 On considère l'opérateur A défini sur l'espace de Hilbert $X = L^2(]0,1[)$ (muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$) par la formule
$$(Af)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \mathrm{d}t \quad , \quad x \in]0,1[\ . \tag{2}$$
On note $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

1. (a) Montrer que pour tout $f \in X$ et tout $x \in]0,1[$, l'intégrale dans l'équation (2) est convergente. Montrer que si $f \in X$, alors $Af \in L^p(]0,1[)$ pour $1 \leq p < 2$.

   (b) On suppose que $f \in C([0,1])$ et on pose $F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que
   $$\|Af\|_2^2 = -|F(1)|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{ \int_0^1 \overline{(Af)(x)} f(x) \mathrm{d}x \right\} .$$
   En déduire que
   $$\|Af\|_2 \leq 2\|f\|_2 \ .$$

   (c) Montrer que A est un opérateur linéaire borné $X \to X$ de norme $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2$.
2. Déterminer l'adjoint A^* de A.
3. On veut déterminer le spectre ponctuel $\sigma_p(A)$ de A.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $z = \lambda^{-1} = \zeta + \mathrm{i}\eta$, où $\zeta = \mathrm{Re}\{z\}$ et $\eta = \mathrm{Im}\{z\}$.
Montrer que $F_\lambda(x) = x^z = \mathrm{e}^{(\zeta+\mathrm{i}\eta)\ln x}$ est solution de l'équation différentielle $\lambda x F'(x) = F(x)$.

(b) Montrer que $F'_\lambda \in L^2(]0,1[)$ si et seulement si $\zeta > 1/2$.

(c) En déduire que $\sigma_p(A)$ est le disque ouvert $B_{(1,0)}(1)$ de centre $(1,0)$ et de rayon 1 du plan complexe.

4. Montrer que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = 2$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Re}\{z\} < 1$, avec $z = \lambda^{-1}$. Montrer que si $g \in C([0,1])$ alors $(A-\lambda)f = g$ admet une solution $f \in X$. En déduire que $A - \lambda$ a une image dense dans X.
Indication : On pourra vérifier que les solutions de l'équation différentielle $-\lambda x F'(x) + F(x) = xg(x)$ sur $[0,1]$ sont données par
$$F(x) = -zx^z \left(\int_x^1 t^{-z} g(t) \mathrm{d}t + C \right) ,$$
puis montrer que l'on peut choisir la constante C de telle manière que $f = F'$ soit continu en 0.

6. Montrer que A n'a pas de spectre résiduel : $\sigma_r(A) = \emptyset$.
En déduire que
$$\sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*) = \{\overline{\lambda}\,;\, \lambda \in \sigma_p(A)\} = B_{(1,0)}(1) .$$

7. **(Questions Bonus)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

(a) Montrer que si $g \in C([0,1])$ alors $(A-\lambda)f = g$ admet une unique solution $f \in X$, qui est telle que
$$\|f\|_2 \leq |\lambda|^{-2}(2 + |\lambda|)\|g\|_2 .$$
Indication : On pourra argumenter comme à la question 5 que $(A-\lambda)f = g$ admet une solution f continue en 0 et montrer que $|f|$ est majoré par $|\lambda|^{-2}\big(A + |\lambda|\big)\big(|g|\big)$.

(b) En déduire que $\sigma(A)$ et $\sigma(A^*)$ sont contenus dans le demi-disque $\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\lambda| \leq 2, \mathrm{Re}\lambda \geq 0\}$.