Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle — Université Grenoble Alpes

2015-2016

Corrigé de l'examen du 21 juin 2016 (seconde session)

Exercice 1 1. Trivial.

2. Montrons que $\overline{E}^\perp = E^\perp$. Il est clair que $\overline{E}^\perp \subset E^\perp$. Soit $f \in E^\perp$. Pour tout $x \in \overline{E}$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E convergeant fortement vers x, d'où $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ (car f est continue et $f(x_n) = 0$). Ainsi, on a $f \in \overline{E}^\perp$, ce qui prouve que $E^\perp \subset \overline{E}^\perp$ et donc $E^\perp = \overline{E}^\perp$. En fait, le même argument s'applique si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, d'où $E^\perp = E_0^\perp$. De même, on a $G^\perp = \overline{G}^\perp = G_0^\perp$. En effet, comme $G \subset \overline{G} \subset G_0$, il est clair que $G_0^\perp \subset \overline{G}^\perp \subset G^\perp$. Soit $x \in G^\perp$. Pour tout $g \in G_0$, on peut trouver une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G convergeant $*$-faiblement vers g, d'où $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ (car $g_n(x) = 0$). Ainsi, on a $x \in G_0^\perp$, ce qui prouve que $G^\perp \subset G_0^\perp$. On en conclut que $G^\perp = \overline{G}^\perp = G_0^\perp$.

3. Par définition de $E^\perp$ et de $\mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{-1}(E^\perp) &= \{y \in X; f_y \in E^\perp\} = \{y \in X; f_y(x) = \langle y, x\rangle = 0 \;\forall\, x \in E\}\\ \mathcal{I}(E)^\perp &= \{x \in X; g(x) = 0 \;\forall\, g \in \mathcal{I}(E)\} = \{x \in X; g_y(x) = \langle y, x\rangle = 0 \;\forall\, y \in E\}\,.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{I}^{-1}(E^\perp)$ et $\mathcal{I}(E)^\perp$ coïncident avec l'orthogonal de E au sens du produit scalaire.

4. Pour tout $g \in X'$, $\ker g = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $(X, \|\cdot\|)$ (car g est continue). Donc $G^\perp = \cap_{g\in G} \ker g$ est fermé comme intersection de fermés. De même, si $x \in X$, la forme linéaire φ_x sur X' définie par $\varphi_x(f) = f(x) \;\forall\, f \in X'$ est continue (car $\|\varphi_x\|_{X''} = \|x\|_X < \infty$, voir cours), donc $\ker \varphi_x$ et $E^\perp = \cap_{x\in E} \ker \varphi_x$ sont des fermés de $(X', \|\cdot\|_{X'})$.

5. $f \in (E+F)^\perp \;\Leftrightarrow\; f(x+y) = 0 \;\forall\, (x,y) \in E\times F \;\Leftrightarrow\; f(x) = -f(y) \;\forall\, (x,y) \in E \times F \quad (*)$.
L'affirmation $(*)$ appliquée à $(x,y) = (x,0) \in E\times F$ implique $f(x) = 0 \;\forall\, x \in E$, c'est-à-dire, $f \in E^\perp$. De même, en prenant $(x,y) = (0,y) \in E \times F$ dans $(*)$ on obtient $f \in F^\perp$, d'où l'on tire $f \in E^\perp \cap F^\perp$. Réciproquement, si $f \in E^\perp \cap F^\perp$ alors $f(x) = f(y) = 0 \;\forall\, (x,y) \in E\times F$ et donc $(*)$ est satisfaite. D'où $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.

6. $E^{\perp\perp} = \{x \in X\,;\, f(x) = 0 \;\forall\, f \in X', f|_E = 0\}$ est fermé d'après la question 3 et contient E. Donc $\overline{E} \subset E^{\perp\perp}$. Pour montrer l'inclusion inverse, on peut supposer que $\overline{E} \neq X$ (le cas $\overline{E} = X$ est évident). Soit $x_0 \in X \setminus \overline{E}$ et $\tilde{f}_0$ la forme linéaire définie sur $\overline{E} \oplus \mathbb{C}\,x_0$ par $\tilde{f}_0(x + \lambda x_0) = \lambda \;\forall\, (x,\lambda) \in \overline{E}\times\mathbb{C}$. Comme l'ouvert $X\setminus\overline{E}$ contient une boule $B_{x_0}(\varepsilon)$ de centre x_0 et de rayon $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que pour tout $(x,\lambda) \in \overline{E}\times\mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, on a $\|-x/\lambda - x_0\|_X \geq \varepsilon$, d'où $|\tilde{f}_0(x+\lambda x_0)| = |\lambda| \leq |\lambda|\, \|-x/\lambda - x_0\|_X/\varepsilon = \|x + \lambda x_0\|_X/\varepsilon$. On en déduit que $\tilde{f}_0$ est bornée sur $\overline{E}\oplus\mathbb{C}\,x_0$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre $\tilde{f}_0$ en une forme linéaire bornée f_0 définie sur tout X, qui vérifie $f_0|_{\overline{E}} = \tilde{f}_0|_{\overline{E}} = 0$ et $f(x_0) = \tilde{f}(x_0) = 1$. On déduit de ce qui précède que $x_0 \notin E^{\perp\perp}$. Ainsi $X\setminus\overline{E} \subset X \setminus E^{\perp\perp}$, c'est-à-dire, $E^{\perp\perp} \subset \overline{E}$. Ceci prouve que $E^{\perp\perp} = \overline{E}$.

   Remarque : une méthode alternative pour prouver l'existence de la forme linéaire f_0 dans le cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ consiste à utiliser la version géométrique du théorème de Hahn-Banach pour le convexe compact $\{x_0\}$ et le convexe fermé $\overline{E}$, qui sont disjoints par hypothèse. On en déduit l'existence de $g_0 \in X'$ et de $\varepsilon > 0$ tels que $g_0(x) \leq g_0(x_0) - \varepsilon$ pour tout $x \in \overline{E}$. Mais $\overline{E}$ est un espace vectoriel et $g_0(\overline{E})$ ne peut être borné supérieurement, à moins que $g_0|_{\overline{E}} = 0$. La forme linéaire cherchée est $f_0 = g_0/g_0(x_0)$.

7. Notons $\mathcal{J} : x \mapsto \varphi_x$ l'isométrie canonique $X \hookrightarrow X''$, où φ_x est défini plus haut. Par définition, si X est réflexif alors $\mathcal{J}$ est surjective et l'on peut identifier X avec $X'' = \mathcal{J}(X)$ et $G^\perp$ avec $\mathcal{J}(G^\perp) = \big\{\varphi \in X''\,;\, \varphi(g) = 0 \;\forall\, g \in G\big\}$. Or si l'on remplace X par X' et E par G dans la définition de $E^\perp$ de l'énoncé, le sous-espace obtenu n'est autre que $\mathcal{J}(G^\perp)$. On peut donc identifier ce sous-espace à $G^\perp$. En appliquant le résultat de la question 6 et en remplaçant l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ par son dual $(X', \|\cdot\|'_X)$, on peut en conclure que $G^{\perp\perp} = \overline{G}$.

8. Vu que par définition $A'f = f \circ A$ pour tout $f \in X'$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A)^{\perp} &= \{f \in X' \; ; \; f(A(x)) = 0 \; \forall \, x \in X\} = \ker(A') && (1) \\ \mathrm{Im}(A')^{\perp} &= \{x \in X ; f(Ax) = 0 \; \forall \, f \in X'\} = \{x \in X \; ; \; Ax = 0\} = \ker(A) \; . && (2) \end{aligned}$$

(la deuxième égalité de la seconde ligne découle d'un corollaire du théorème de Hahn-Banach, qui implique l'existence d'une forme linéaire $f \in X'$ telle que $f(Ax) = \|Ax\|_X$).
On déduit de la question 6 et de (1) que $\ker(A')^{\perp} = \mathrm{Im}(A)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)}$. De même, on déduit de la question 7 et de (2) que si X est réflexif, alors $\ker(A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A')^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A')}$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de généraliser le théorème ergodique de von Neumann. Selon ce théorème, si $A = U$ est une application linéaire unitaire d'un espace de Hilbert dans lui-même et S_N est la somme de Cesàro

$$S_N = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} A^n \; ,$$

alors pour tout $x \in X$, $S_N x \to Px$ quand $N \to \infty$, où P est le projecteur sur $F = \ker(A - 1_X)$. Dans le cas d'une application linéaire $A : X \to X$ avec X un espace de Banach et $\|A^n\|$ borné uniformément en n, $S_N x$ ne converge pas forcément pour tout $x \in X$ (à moins que X soit réflexif), mais l'on a un résultat analogue sur le sous-espace $Y \subset X$ où il y a convergence. De plus, il suffit d'avoir la convergence faible d'une sous-suite de $(S_N y)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ pour conclure que $y \in Y$.

1. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X)}$ il vient

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^\star} \|S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{N \in \mathbb{N}^\star} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M < \infty \; .$$

   En particulier, S_N est borné et donc $S_N \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$AS_N - S_N = S_N A - S_N = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} A^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} A^n \right) = \frac{1}{N} \left(A^N - 1_X \right) \; .$$

   Donc $\|AS_N - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S_N A - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \leq N^{-1}(M+1) \to 0$ quand $N \to \infty$.

2. Y est un sous-espace vectoriel de X par linéarité des applications S_N et de la limite. Montrons que Y est fermé. Soit $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite dans Y convergeant vers $y \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe m tel que $\|y - y_m\| \leq \varepsilon/(4M)$. Dans ce qui suit, on choisit un tel m *fixé*. Comme $(S_N \, y_m)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente (car $y_m \in Y$), c'est une suite de Cauchy et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N, N' \geq N_0 \Rightarrow \|(S_N - S_{N'}) y_m\|_X \leq \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \; \|(S_N - S_{N'})y\|_X \leq \|S_N - S_{N'}\|_{\mathcal{L}(X)} \|y - y_m\|_X + \|(S_N - S_{N'})y_m\|_X \leq 2M\|y - y_m\|_X + \varepsilon/2 \leq \varepsilon \; ,$$

   où l'on a utilisé la question 1 pour majorer $\|S_N - S_{N'}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S_N\|_{\mathcal{L}(X)} + \|S_{N'}\|_{\mathcal{L}(X)}$ par $2M$. Par conséquent, $(S_N y)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy et donc est convergente dans X (X complet). D'où $y \in Y$ et Y est fermé.

3. (a) $P : y \in Y \mapsto \lim_{N \to \infty} S_N \, y \in X$ est linéaire par linéarité de S_N et de la limite. Il s'agit d'une application linéaire bornée car

$$\|Py\|_X = \lim_{N \to \infty} \|S_N y\|_X \leq \limsup_{N \to \infty} \|S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X \leq M \|y\|_X \;\; \forall \, y \in Y \; .$$

   (b) Soit $y \in Y$. D'après la définition de P, la continuité de A et la question 1,

$$\|APy - Py\|_X = \lim_{N \to \infty} \|AS_N \, y - S_N \, y\|_X \leq \lim_{N \to \infty} \|AS_N - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X = 0 \; .$$

   Par conséquent, $Py \in F = \ker(A - 1_X)$. D'où $\mathrm{Im}(P) \subset F$. Or si $z \in F$ alors $A^n z = z$ et $S_N z = z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $N \in \mathbb{N}^\star$. D'où $F \subset Y$ et $P|_F = 1_F$. Il s'ensuit que $F = P(F) \subset P(Y) = \mathrm{Im}(P)$. On en conclut que $\mathrm{Im}(P) = F$.

(c) Comme $\mathrm{Im}(P) = F$ et $P|_F = 1_F$, il vient $P^2 y = 1_F(Py) = Py$ pour tout $y \in Y$. Ainsi, P est un projecteur. On a vu à la question (b) que $APy = Py$ pour tout $y \in Y$. Un argument analogue utilisant $\lim_{N\to\infty} \|S_N A - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ montre que $PAy = Py$ pour tout $y \in Y$. Ceci montre que $P = AP = PA$.

4. Soit $y \in H = \overline{\mathrm{Im}(A - 1_X)}$. Il existe une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $Ax_m - x_m \to y$ quand $m \to \infty$. D'après la question 1, pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, $\|S_N(Ax_m - x_m)\|_X \leq \|S_N A - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_m\|_X \to 0$ quand $N \to \infty$. Donc $Ax_m - x_m \in Y$ et $P(Ax_m - x_m) = 0$. Puisque Y est fermé et P est continue sur Y, il s'ensuit que $y \in Y$ et $Py = 0$. On a donc prouvé que $H \subset Y$ et $H \subset \ker P$.

5. (i) $\Rightarrow$ (ii) a été démontré dans la question précédente.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que $y \in Y$ et $Py = 0$. Soit $f \in F' = \ker(A' - 1_{X'})$. Alors $f = A'f = f \circ A = f \circ A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité et continuité de f, il en résulte que
$$f(y) = f(S_N y) = \lim_{N\to\infty} f(S_N y) = f(Py) = 0\ .$$
(iii) $\Leftrightarrow$ (i). Avec les notations de l'exercice 1, (iii) s'écrit $y \in (F')^{\perp}$. Grâce au résultat de la question 8 de cette exercice appliqué à $A' - 1_{X'} = (A - 1_X)'$, on a $(F')^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A - 1_X)} = H$. D'où (iii) $\Leftrightarrow$ (i).

6. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) montre que $H = \ker(P) \subset Y$. D'après la question 3, $P : Y \to Y$ est un projecteur d'image $\mathrm{Im}(P) = F \subset Y$. Donc $Y = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P) = F \oplus H$.

7. (a,c) On veut montrer que si X est réflexif alors $Y = X$, c'est-à-dire, la suite $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ converge pour tout $x \in X$. Il suffit de montrer que $Y^{\perp} = \{0_{X'}\}$. En effet, puisque Y est fermé cela impliquera $Y = Y^{\perp\perp} = \{0_{X'}\}^{\perp} = X$ par l'exercice 1 (de manière alternative, on peut invoquer le corollaire suivant du théorème de Hahn-Banach : soit $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé de X ; si pour tout $f \in X'$, $f|_M = 0 \Rightarrow f = 0_{X'}$, alors $M = X$). D'après la question 6 et l'exercice 1, on a $Y^{\perp} = (F \oplus H)^{\perp} = F^{\perp} \cap H^{\perp}$. De plus, grâce aux résultats des questions 2 et 8 de l'exercice 1, on trouve $H^{\perp} = \mathrm{Im}(A - 1_X)^{\perp} = \ker(A' - 1_{X'}) = F'$ et $F^{\perp} = \ker(A - 1_X)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A' - 1_{X'})} = H'$ (notons que la réflexivité de X n'est utilisée que dans la dernière égalité). D'où
$$Y^{\perp} = F^{\perp} \cap H^{\perp} = H' \cap F'\ .$$
(b) Il reste à montrer que $H' \cap F' = \{0_{X'}\}$. Cela découle des arguments des questions 1 à 4 transposés à l'espace dual $(X', \|\cdot\|_{X'})$ et à l'application A', au lieu de $(X, \|\cdot\|_X)$ et A (notons que l'on a bien $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(A')^n\|_{\mathcal{L}(X')} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(A^n)'\|_{\mathcal{L}(X')} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} = M < \infty$). En effet, on montre par ces arguments que $H' \subset \ker P'$, où $P' \in \mathcal{L}(X')$ est le projecteur d'image F'. Il en résulte que $f \in H' \cap F' \Rightarrow P'f = f = 0_{X'}$, d'où le résultat.

8. On ne suppose pas ici que X est réflexif. La convergence en norme de $(S_N y)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ implique la convergence faible, donc il est clair que (I) $\Rightarrow$ (II).
(II) $\Rightarrow$ (III). Soit $x \in X$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. Alors $S_N x \in C_x$ (en effet, la somme des coefficients positifs $t_n = N^{-1}$ multipliant les A^n dans la somme S_N est bien égale à 1). Il est facile de montrer que $\overline{C_x}$ est convexe : si $t \in [0,1]$ et $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans C_x convergeant vers y et z, alors la suite $(ty_p + (1-t)z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans C_x (car C_x est convexe) et converge vers $ty + (1-t)z \in \overline{C_x}$. Or tout ensemble convexe fortement fermé de X est faiblement fermé (cf. cours). Donc $\overline{C_x}$ est faiblement fermé. Soit $y \in X$ satisfaisant l'hypothèse (II) et $(S_{N_k} y)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une sous-suite de $(S_N y)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ convergeant faiblement vers z. Puisque $\overline{C_y}$ est faiblement fermé, on a $z \in \overline{C_y}$. Il reste à montrer que $z \in F$. Soit $f \in X'$. Alors $|f(AS_{N_k} y - S_{N_k} y)| \leq \|f\|_{X'} \|AS_{N_k} - S_{N_k}\|_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X \to 0$ quand $N \to \infty$ d'après la question 1. Mais
$$\lim_{k\to\infty} f(AS_{N_k} y - S_{N_k} y) = \lim_{k\to\infty} (A'f - f)(S_{N_k} y) = (A'f - f)(z)$$
car $S_{N_k} y \to z$ faiblement. Par unicité de la limite, $(A'f - f)(z) = 0$, c'est-à-dire, $f(Az - z) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $f \in X'$, il s'ensuit que $Az - z = 0$ (utiliser le théorème de Hahn-Banach, cf. exercice 1, question 8). Donc $z \in F$.

(III) $\Rightarrow$ (I). Soit $y \in Y$ tel que $\overline{C_y} \cap F \neq \emptyset$, $z \in \overline{C_y} \cap F$ et $\varepsilon > 0$. Soit u une combinaison convexe finie des vecteurs $y, Ay, A^2y, \cdots$ approchant z à ε près, $\|z-u\|_X \leq \varepsilon$. Un calcul analogue à celui détaillé dans la question 1 montre que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|S_N A^m - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(A^{m+n} - A^n\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{2Mm}{N} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

En particulier, $\|S_N A^m y - S_N y\|_X \to 0$ quand $N \to \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il en découle que $\|S_N u - S_N y\|_X \to 0$. En effet, pour tout $u = \sum_{m=0}^{Q-1} t_m A^m y$ avec $Q \in \mathbb{N}^\star$, $t_m \geq 0$ et $\sum_m t_m = 1$, on a

$$\|S_N u - S_N y\|_X = \left\| \sum_{m=0}^{Q-1} t_m (S_N A^m y - S_N y) \right\|_X \leq \sum_{m=0}^{Q-1} t_m \|S_N A^m y - S_N y\|_X \to 0\ .$$

On a déjà vu que $z \in F \Rightarrow S_N z = z$. D'où

$$\limsup_{N\to\infty} \|z - S_N y\|_X \leq \limsup_{N\to\infty} \|S_N z - S_N u\|_X + \lim_{N\to\infty} \|S_N u - S_N y\|_X \leq M\|z-u\|_X \leq M\varepsilon\ .$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient $\lim\limits_{N\to\infty} \|z - S_N y\|_X = 0$, c'est-à-dire, $y \in Y$ et $Py = z$.

Supposons que X soit réflexif. D'après un corollaire du théorème de Banach-Alaoglu (cf. cours), toute suite bornée dans X admet une sous-suite faiblement convergente. Or pour tout $x \in X$, la suite $(S_N x)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ est bornée (elle est contenue dans la boule de centre 0 et de rayon $M\|x\|$). Donc l'implication (II) $\Rightarrow$ (I) entraîne $Y = X$ et l'on retrouve le résultat de la question 7.