Examen du 17 mai 2016 (durée : 3 heures)

Les notes de cours et de TD sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 4 exercices indépendants. On conseille cependant de faire l'exercice 2 avant l'exercice 3.

Dans tout ce qui suit, si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach, $(X', \|\cdot\|_{X'})$ est l'espace de Banach dual, $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés $X \to X$ et 1_X est l'opérateur identité sur X. Si $A \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$ désignent respectivement les spectres ponctuel, continu et résiduel de A, et $\sigma(A)$ est leur réunion (spectre de A).

Exercice 1 *Espaces de Banach séparables et dual.*

Soit X un espace de Banach ayant un dual X' séparable. On veut montrer que X est séparable.

1. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans X'. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|x_n\|_X = 1 \quad , \quad f_n(x_n) \geq \frac{\|f_n\|_{X'}}{2} \; .$$
2. Soit $V = \{\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x_n ; N \in \mathbb{N}, \lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{C}\}$ l'espace vectoriel engendré par les x_n. Montrer que pour toute forme linéaire continue $f \in X'$, on a
$$f(x) = 0 \;\text{ pour tout }\; x \in V \quad \Rightarrow \quad f = 0 \; .$$
3. En utilisant une conséquence du théorème de Hahn-Banach, en déduire que V est dense dans X.
4. Montrer que X est séparable.

Exercice 2 *Convergence faible d'une suite dans un espace de Hilbert.*

Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $\|\cdot\|_X$ la norme associée au produit scalaire, $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée maximale de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On rappelle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $f \in X'$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

1. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si $\forall\, y \in X$, $\lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$;
(ii) $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$ et pour tout $i \in I$, $\lim_{n\to\infty}\langle e_i, x_n\rangle = \langle e_i, x\rangle$;
(iii) $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$ et il existe $M \subset X$ dense dans X tel que $\forall\; y \in M$, $\lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.
3. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de X ($(e_i)_n = 1$ si $i = n$ et 0 sinon). Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $\lim_{n\to\infty}\langle e_i, x_n\rangle = \langle e_i, x\rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Exercice 3 *Alternative de Fredholm pour les opérateurs compacts.*

Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On rappelle qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(X)$ est *compact* s'il transforme tout ensemble borné de X en un ensemble pré-compact, c'est-à-dire, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X la suite $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite fortement convergente. On veut montrer que l'image $\mathrm{Im}(1_X - K)$ de $1_X - K$ est fermée pour la topologie forte et que $1_X - K$ est injectif $\Rightarrow$ $1_X - K$ est surjectif.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné quelconque. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x alors $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Ax.
2. Dans tout ce qui suit, $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x alors $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers Kx.
Indication : si $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers Kx, alors modulo le passage à une sous-suite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|Kx_n - Kx\|_X \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant fortement vers $y \neq Kx$ et en déduire une contraction.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\|x_n\|_X = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ et $\|(1_X - K)x_n\|_X \to 0$ quand $n \to \infty$. On rappelle que l'on peut extraire de toute suite bornée une sous-suite faiblement convergente. Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle sous-suite convergeant faiblement vers x. Montrer en utilisant la question 2 que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Kx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent fortement vers Kx et que $x = Kx$.
4. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|(1_X - K)x\|_X \geq c$ pour tout $x \in [\ker(1_X - K)]^\perp$, $\|x\|_X = 1$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(1_X - K)$ est fermé pour la topologie forte.
Indication : montrer en utilisant le théorème de la projection que pour tout $y_n \in \mathrm{Im}(1_X - K)$, il existe $x_n \in [\ker(1_X - K)]^\perp$ tel que $y_n = (1_X - K)x_n$ et utiliser la question 4 pour montrer que si $y_n \to y$ quand $n \to \infty$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
6. On suppose que 1 n'est pas une valeur propre de K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $Y_n = \mathrm{Im}\big((1_X - K)^n\big)$.
   (a) Montrer par récurrence que Y_n est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que si $Y_1 \neq X$, alors $Y_{n+1} \subset Y_n$ et $Y_{n+1} \neq Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On suppose que $Y_1 \neq X$. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X vérifiant $y_n \in Y_n \cap Y_{n+1}^\perp$ et $\|y_n\|_X = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour une telle suite, si $m > n \geq 1$ alors
   $$\begin{aligned}\|Ky_n - Ky_m\|_X^2 &= \|(1_X - K)y_m - (1_X - K)y_n - y_m + y_n\|_X^2 \\ &= \|(1_X - K)y_m - (1_X - K)y_n - y_m\|_X^2 + 1 \;\geq\; 1\,.\end{aligned}$$
   En déduire que $(Ky_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.
   (d) En conclure que $Y_1 = X$ et que $1_X - K$ est inversible.
7. On considère l'opérateur K sur $X = L^2([0,1])$ défini par
   $$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\mathrm{d}s\,, \tag{1}$$
   où $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est de carré intégrable, $k \in L^2([0,1]^2)$.
   (a) Montrer que K est une application linéaire bornée $X \to X$ et que $\|K\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \leq \int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.
   Indication : vous pourrez utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Vous admettrez le résultat suivant : si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ d'opérateurs K_n de rangs finis convergeant vers K pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$, alors K est un opérateur compact. En approchant k par des fonctions polynômes de deux variables et en utilisant l'inégalité de la question précédente, trouver une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs de rangs finis telle que $\|K_n - K\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ quand $n \to \infty$. En déduire que l'opérateur K défini par (1) est compact.
   (c) On considère l'équation
   $$u(t) = (Ku)(t) + f(t) \tag{2}$$
   où $f \in L^2([0,1])$ est une fonction donnée. Montrer que (2) a une unique solution $u(t)$ si et seulement si l'équation homogène $u(t) = (Ku)(t)$ n'a pas de solution $u \neq 0$. En déduire que l'unicité de la solution de (2) implique l'existence de la solution pour tout f.

Exercice 4 *Spectres des opérateurs de décalage à gauche sur $\ell^1(\mathbb{N})$ et à droite sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

On rappelle que le dual de l'espace de Banach $X = \ell^1(\mathbb{N})$ est isomorphe à $Y = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Plus précisemment, $X' = \mathcal{J}(Y)$ où $\mathcal{J}$ est l'isométrie surjective $Y \to X'$ définie par $[\mathcal{J}(u)](v) = \sum_{n\geq 0} u_n v_n$ pour tout $u \in Y$ et $v \in X$. On voudrait déterminer les spectres des opérateurs S_- de décalage à gauche sur X et S_+ de décalage à droite sur Y. On rappelle que ces opérateurs sont définis par

$$\begin{aligned}S_-(v_0, v_1, v_2, \cdots) &= (v_1, v_2, v_3, \cdots) \quad , \quad v = (v_0, v_1, v_3, \cdots) \in X \\ S_+(u_0, u_1, u_2, \cdots) &= (0, u_0, u_1, \cdots) \quad , \quad u = (u_0, u_1, u_2, \cdots) \in Y\,.\end{aligned}$$

On note $B_0(1)$ (respectivement $\overline{B_0(1)}$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $S_+ \in \mathcal{L}(Y)$ et que S_+ est une isométrie $Y \to Y$.
2. On note S'_- le dual de S_-. Montrer que $S_+ = \mathcal{I}^{-1} \circ S'_- \circ \mathcal{I}$. Déterminer les normes d'opérateurs $\|S_-\|_{\mathcal{L}(X)}$ et $\|S_+\|_{\mathcal{L}(Y)}$. L'application linéaire S_- est-elle une isométrie ?
3. Montrer que $\sigma(S_-) \subset \overline{B_0(1)}$ et $\sigma(S_+) \subset \overline{B_0(1)}$.
4. Montrer que $\sigma_p(S_-) = B_0(1)$, en déduire que $\sigma(S_-) = \overline{B_0(1)}$.
5. Montrer que $\sigma_p(S_+) = \emptyset$.
6. En déduire que $\sigma_r(S_-) = \emptyset$, $\sigma_c(S_-) = C_0(1) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ et $\sigma_r(S_+) \supset B_0(1)$.
7. Montrer que $\sigma_r(S_+) \supset C_0(1)$.
8. En déduire que $\sigma_r(S_+) = \overline{B_0(1)}$.