Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle
2015-2016

Université Grenoble Alpes

Corrigé de l'examen du 17 mai 2016

Exercice 1

1. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans X'. Par définition du sup, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n\|_X = 1$ et $|f_n(x_n)| \geq \sup_{\|x\|_X=1} |f_n(x)| - \varepsilon = \|f_n\|_{X'} - \varepsilon$. En supposant que $f_n \neq 0$ et en choisissant $\varepsilon = \|f_n\|_{X'}/2 > 0$, on obtient l'inégalité cherchée :
$$|f_n(x_n)| \geq \frac{\|f_n\|_{X'}}{2} \quad , \quad \|x_n\|_X = 1 \tag{1}$$
(qui est aussi trivialement vraie si $f_n = 0$).

2. Soit $V = \{\sum_{n=0}^N \lambda_n x_n ; N \in \mathbb{N}, \lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{C}\}$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des x_n. Soit $f \in X'$ une forme linéaire s'annulant sur V, c'est-à-dire telle que $f|_V = 0$. Montrons qu'alors $f = 0$. Par densité de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X', pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que $\|f - f_n\|_{X'} \leq \varepsilon$. En utilisant (1) et $f(x_n) = 0$, il vient
$$\begin{aligned} \|f\|_{X'} &\leq \|f - f_n\|_{X'} + \|f_n\|_{X'} \leq \|f - f_n\|_{X'} + 2|f_n(x_n)| \\ &\leq \|f - f_n\|_{X'} + 2|(f_n - f)(x_n)| + 2|f(x_n)| \\ &\leq 3\|f - f_n\|_{X'} \leq 3\varepsilon \ . \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que $\|f\|_{X'} = 0$. Donc $f = 0$.

3. Une conséquence du théorème de Hahn-Banach est que si $M \subset X$ est un sous-espace vectoriel fermé de X, $M \neq X$, alors il existe $f \in X'$ telle que $f|_M = 0$ et $f \neq 0$ (en effet, d'après la version géométrique du théorème de Hahn-Banach, si $x_0 \notin M$ alors il existe un hyperplan séparant strictement le convexe compact $\{x_0\}$ du convexe fermé M disjoint de $\{x_0\}$; autrement dit, il existe $f \in X'$ telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in M$; or l'image de l'espace vectoriel M par la forme linéaire f ne peut être inclu dans $]-\infty, f(x_0)[$, à moins que $f|_M = 0$). En appliquant ce résultat à $M = \overline{V}$, on déduit de la question 2 que $\overline{V} = X$.

4. Soit $V_0 = \{\sum_{n=0}^N q_n x_n ; N \in \mathbb{N}, q_0, \cdots, q_N \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\}$. Montrons que V_0 est dénombrable. Quitte à éliminer les x_n qui sont des combinaisons linéaires des x_k, $0 \leq k < n$, de sorte que $\{x_n\}_{n=0}^N$ soit une famille libre (cette procédure d'élimination ne change par V_0), $W_N = \{\sum_{n=0}^N q_n x_n ; q_0, \cdots, q_N \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\}$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{2N}$. Donc W_N est dénombrable. Par conséquent, il en est de même pour $V_0 = \cup_{N=0}^\infty W_N$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, V_0 est dense dans V. En effet, pour tout $x = \sum_{n=0}^N \lambda_n x_n \in V$ et $\varepsilon > 0$, il existe $q_0, \cdots, q_N \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ tels que $|\lambda_n - q_n| \leq \varepsilon/N \ \forall\, n = 0, \cdots, N$; puisque $\|x_n\|_X = 1$, il s'ensuit que $\|x - \sum_{n=0}^N q_n x_n\|_X \leq \sum_{n=0}^N |\lambda_n - q_n| \leq \varepsilon$). Comme V est dense dans X (question 3), on en conclut que V_0 est dense dans X. On a donc prouvé que X admet un sous-ensemble dénombrable V_0 dense dans X, c'est-à-dire, que X est séparable.

Exercice 2

1. En vertu du théorème de représentation de Riesz, l'application $y \in X \mapsto \langle y, \cdot \rangle$ est une isométrie surjective $X \to X'$. Par définition, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x <u>ssi</u> $f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ pour tout $f \in X'$ <u>ssi</u> $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ quand $n \to \infty$ pour tout $y \in X$.

2. On va montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Au vu de la question 1, il est clair que (i) implique la convergence $\langle e_i, x_n \rangle \to \langle e_i, x \rangle$ pour tout $i \in I$. Soit $\mathcal{I} : x \in X \mapsto \varphi_x \in X''$ l'isométrie définie par $\varphi_x(f) = f(x) \ \forall\, f \in X' \ \forall\, x \in X$ (voir cours). Par hypothèse, la suite $(\varphi_{x_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_x(f)$ et est donc bornée pour tout $f \in X$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, il s'ensuit que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_{x_n}\|_{X''} < \infty$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Comme $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthonormée maximale, l'espace vectoriel engendré par les e_i, $M = \{\sum_{k=0}^{N} \lambda_{i_k} e_{i_k}; N \in \mathbb{N}, i_0, \cdots, i_N \in I, \lambda_0, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{C}\}$, est dense dans X. Il découle de (ii) que pour tout $y = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{i_k} e_{i_k} \in M$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{i_k} \lim_{n\to\infty} \langle e_{i_k}, x_n \rangle = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{i_k} \langle e_{i_k}, x \rangle = \langle y, x \rangle$$

(la somme est finie donc la limite de la somme est la somme des limites).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $z \in X$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M \subset X$ dense dans X satisfaisant (iii) et $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$. On peut trouver un $y \in M$ tel que $\|z - y\|_X \le \varepsilon/(\|x\|_X + C)$. Par hypothèse $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ quand $n \to \infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge N \Rightarrow |\langle y, x_n - x \rangle| \le \varepsilon$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle z, x_n - x \rangle| &\le |\langle z - y, x_n - x \rangle| + |\langle y, x_n - x \rangle| \le \|z - y\|_X (\|x_n\|_X + \|x\|_X) + \varepsilon \\ &\le 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Ceci prouve que pour tout $z \in X$, $\langle z, x_n \rangle \to \langle z, x \rangle$ quand $n \to \infty$, ce qui est équivalent à la convergence faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x (question 1).

3. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et

$$x_n = (0, \cdots 0, \underbrace{n}_{n-\text{ième terme}}, 0, \cdots) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Il est clair que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\langle e_i, x_n \rangle \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Pourtant, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement car $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty$ (si la suite convergeait faiblement, cela contredirait $(i) \Rightarrow (ii)$).

Remarque : on peut démontrer directement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement en considérant par exemple $z = ((n+1)^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$: on a $\langle z, x_n \rangle = n/(n+1) \to 1 \ne \langle z, 0 \rangle$ quand $n \to \infty$ alors que $\langle e_i, x_n \rangle \to \langle e_i, 0 \rangle$.

Exercice 4

1. Il est clair que S_+ est un opérateur linéaire. Pour tout $u \in Y = \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\|S_+ u\|_Y = \max\{0, |u_0|, |u_1|, \cdots\} = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty < \infty$. Ainsi, $S_+ u \in Y$ et S_+ est une isométrie $Y \to Y$. Par conséquent, S_+ est borné et $\|S_+\|_{\mathcal{L}(Y)} = 1$.

2. Pour tout $u \in Y$ et $v \in X = \ell^1(\mathbb{N})$, on a par définition de l'opérateur dual

$$\begin{aligned} \big[S'_- \circ \mathcal{J}(u)\big](v) &= \mathcal{J}(u)(S_- v) = \sum_{n\ge 0} u_n (S_- v)_n = \sum_{n\ge 0} u_n v_{n+1} = \sum_{n\ge 1} u_{n-1} v_n = \sum_{n\ge 0} (S_+ u)_n v_n \\ &= \big[\mathcal{J}(S_+ u)\big](v) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{J}^{-1} \circ S'_- \circ \mathcal{J} = S_+$. Ainsi, on peut identifier le dual de l'opérateur S_- sur X de décalage à gauche avec l'opérateur S_+ sur Y de décalage à droite, modulo l'identification de X' avec Y. En particulier, S'_- et S_+ ont les mêmes spectres ponctuel, continu et résiduels. Soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\ell^1(\mathbb{N})$. On a déjà vu que $\|S_+\|_{\mathcal{L}(Y)} = 1$. Comme $A \in \mathcal{L}(X) \mapsto A' \in \mathcal{L}(X')$ et $\mathcal{J} : Y \to X'$ sont des isométries, il s'ensuit que $\|S_-\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S'_-\|_{\mathcal{L}(X')} = \|S_+\|_{\mathcal{L}(Y)} = 1$ (on peut aussi vérifier directement que $\|S_- v\|_X = \sum_{n\ge 1} |v_n| \le \|v\|_X \ \forall\, v \in X$ et $\|S_- e_i\|_X = \|e_i\|_X = 1$ si $i \ge 1$). Pour $v = e_0$ on a $S_- v = 0$. Donc S_- n'est pas une isométrie.

3. D'après le cours, le spectre d'un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(X)$ est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans la boule fermée de rayon $\|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. On obtient ici $\sigma(S_\pm) \subset \overline{B_0(1)}$.

4. Montrons que $\sigma_p(S_-) = B_0(1)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(S_-) &\Leftrightarrow \exists\, v \in X, v \ne 0, (S_- v)_n = v_{n+1} = \lambda v_n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow v = (v_0 \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \text{ pour } v_0 \ne 0 \ . \end{aligned}$$

La dernière affirmation est vraie ssi $\lambda \in B_0(1)$. Comme $\sigma(S_-)$ contient $\sigma_p(S_-) = B_0(1)$ et est contenu dans $\overline{B_0(1)}$, et est de plus fermé, il en découle que $\sigma(S_-) = \overline{B_0(1)}$.

5. Montrons que $\sigma_p(S_+) = \emptyset$. En effet,

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_p(S_+) &\Leftrightarrow \exists\, u \in Y, u \neq 0, (S_+u)_n = \lambda u_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow \exists\, u \in Y, u \neq 0, 0 = \lambda u_0 \text{ et } u_{n-1} = \lambda u_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star\ .\end{aligned}$$

   La dernière affirmation est impossible car les équations pour u_n impliquent $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $\lambda \neq 0$ et également si $\lambda = 0$.

6. En utilisant les propriétés des spectres d'un opérateur A et de son dual A', on a $\sigma_r(S_-) \subset \sigma_p(S'_-) = \sigma_p(S_+)$. Par la question 5, il vient $\sigma_r(S_-) = \emptyset$. De plus, $\sigma(S_-) = \sigma_p(S_-) \cup \sigma_c(S_-) \cup \sigma_r(S_-) = B_0(1) \cup \sigma_c(S_-) = \overline{B_0(1)}$ (question 4), d'où $\sigma_c(S_-) = C_0(1)$ (car les spectres ponctuel et continu sont par définition disjoints). Finalement, en utilisant $\sigma_p(S_-) \subset \sigma_p(S'_-) \cup \sigma_r(S'_-)$ (voir cours), $\sigma_p(S_-) = B_0(1)$ (question 4) et $\sigma_p(S'_-) = \sigma_p(S_+) = \emptyset$ (question 5), on trouve que $B_0(1) \subset \sigma_r(S'_-) = \sigma_r(S_+)$.

7. Nous avons montré que $B_0(1) \subset \sigma_r(S_+) \subset \sigma(S_+) \subset \overline{B_0(1)}$ et que $\sigma_p(S_+) = \emptyset$. Il reste à déterminer si $\sigma(S_+)$ contient $C_0(1)$ et à trouver le cas échéant la nature (continu ou résiduel ?) du spectre de S_+ dans $C_0(1)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ et $z = (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2, \cdots) \in Y$. Considérons le fermé $Z = \{u \in Y; \|u - z\|_Y \leq 1/2\} \subset Y$. Montrons que $Z \cap \mathrm{Im}(\lambda - S_+) = \emptyset$, ce qui impliquera que $\mathrm{Im}(\lambda - S_+)$ n'est pas dense dans Y et donc que $\lambda \in \sigma_r(S_+)$ (rappelons que $\sigma_p(S_+) = \emptyset$). Soit $u \in Z$. Supposons qu'il existe $w \in Y$ tel que $u = (\lambda - S_+)w$, c'est-à-dire, $u_0 = \lambda w_0$ et $u_n = \lambda w_n - w_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On montre facilement par récurrence que $w_n = \overline{\lambda}^{n+1} \sum_{k=0}^n \lambda^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $|w_n| \geq \sum_{k=0}^n \mathrm{Re}\{\lambda^k u_k\}$. Mais $\mathrm{Re}\{\lambda^k u_k\} = \mathrm{Re}\{\lambda^k z_k\} + \mathrm{Re}\{\lambda^k(u_k - z_k)\} \geq 1 - |u_k - z_k| \geq 1/2$. D'où $|w_n| \geq (n+1)/2$, ce qui contredit l'hypothèse $w \in Y$. Donc $Z \cap \mathrm{Im}(\lambda - S_+) = \emptyset$ et $\lambda \in \sigma_r(S_+)$. Ainsi, $C_0(1) \subset \sigma_r(S_+)$.

8. D'après ce qui précède, $\sigma(S_+) = \sigma_r(S_+) = \overline{B_0(1)}$.

Conclusions :

- *Le spectre de l'opérateur S_- sur X est $\sigma(S_-) = \overline{B_0(1)}$, il s'agit de spectre ponctuel dans la boule ouverte $B_0(1)$ et de spectre continu sur le cercle unité $C_0(1)$ (S_- n'a donc pas de spectre résiduel).*
- *Le spectre de l'opérateur $S_+ = S'_-$ sur Y est la boule unité fermée $\sigma(S_+) = \overline{B_0(1)}$ et est entièrement composé de spectre résiduel (S_+ n'a donc ni spectre ponctuel ni spectre continu).*

Exercice 3 (problème)

1. Si $A \in \mathcal{L}(X)$ et $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, alors pour tout $f \in X'$, $f(Ax_n - Ax) = f \circ A(x_n - x) \to 0$ quand $n \to \infty$ vu que $f \circ A \in X'$. Il s'ensuit que $Ax_n \rightharpoonup Ax$ faiblement.

2. On suppose que $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement et que $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers Kx. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que nous noterons aussi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour simplifier les notations, telle que $\|Kx_n - Kx\|_X \geq \varepsilon \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Comme $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, on sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (voir l'exercice 2). Par compacité de K, il existe une sous-suite fortement convergente $(Kx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite $y = \lim_{k\to\infty} Kx_{n_k}$ distincte de x (car $\|Kx_{n_k} - Kx\|_X \geq \varepsilon$). La convergence forte implique la convergence faible, donc $Kx_{n_k} \rightharpoonup y$. Mais nous avons vu à la question 1 que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ entraîne $Kx_{n_k} \rightharpoonup x$. Comme $y \neq x$, ceci contredit l'unicité de la limite faible. Nous avons donc montré par l'absurde que si $K \in \mathcal{L}(X)$ est compact et $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, alors $Kx_n \to Kx$ fortement.

3. Dans toute la suite, on pose $A = 1_X - K$, où $K \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact. On suppose que $\|x_n\|_X = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\|Ax_n\|_X \to 0$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $x \in X$ (voir cours). Alors, par la question 2, $Kx_{n_k} \to Kx$ fortement. Il en découle que $x_{n_k} = Ax_{n_k} + Kx_{n_k} \to Kx$ fortement. En utilisant à nouveau le fait que la convergence forte implique la convergence faible et l'unicité de la limite faible, on en déduit que $x = Kx$.

4. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[\ker A]^\perp \cap S_0(1)$, où $S_0(1) = \{x \in X; \|x\|_X = 1\}$ est la sphère unité de X, telle que $\|Ax_n\|_X \to 0$. D'après la question 3, quitte à extraire une sous-suite, $x_n \to x$ fortement avec $x \in \ker A$. Ainsi, $\langle x_n, x\rangle = 0$ (car $x_n \in [\ker A]^\perp$) et donc $\|x\|_X^2 = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle = 0 = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_X^2$ (car $x_n \to x$), en contradiction avec l'hypothèse $x_n \in S_0(1)$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|Ax\|_X \geq c \quad \text{pour tout } x \in [A]^\perp \cap S_0(1)\ . \tag{2}$$

5. Montrons que $Y = \mathrm{Im} A$ est fortement fermé. Soit $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y convergeant fortement vers y. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $y_m = A\widetilde{x}_m$ avec $\widetilde{x}_m \in X$. Par le théorème de la projection, on peut décomposer $\widetilde{x}_m = x_m + z_m$ avec $x_m \in [\ker A]^\perp$ et $z_m \in \ker A$, d'où $y_m = Ax_m$. En prenant $x = (y_k - y_m)/\|y_k - y_m\|_X \in [\ker A]^\perp \cap S_0(1)$ dans (2), il vient

$$\|y_k - y_m\|_X = \|A(x_k - x_m)\|_X \geq c\|x_k - x_m\|_X \ . \tag{3}$$

Puisque $y_m \to y$ fortement, il en découle que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X complet. Donc cette suite converge vers $x \in X$. Mais A est borné et donc continu, d'où $y_m = Ax_m \to Ax$. Par unicité de la limite forte, $y = Ax \in Y$, d'où le résultat.

6. On suppose que $1 \notin \sigma_p(K)$, c'est-à-dire, que $\ker A = \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $Y_n = \mathrm{Im}(A^n)$.

(a)-(b) Il est clair que $Y_{n+1} = A^n(A(X)) \subset A^n(X) = Y_n$. Montrons par récurrence que pour tout entier positif n, (a) Y_n est fermé et (b) si $Y_1 \neq X$ alors $Y_{n+1} \neq Y_n$.
   - C'est vrai pour $n = 0$ (évident).
   - Supposons que (a) et (b) soient vrais pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $(y_m^{(n+1)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y_{n+1} convergeant fortement vers $y^{(n+1)}$. Par le même argument que dans la question 5, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $y_m^{(n)} \in Y_n \cap [\ker A]^\perp$ tel que $y_m^{(n+1)} = Ay_m^{(n)}$. En remplaçant x_m par $y_m^{(n)}$ et y_m par $y_m^{(n+1)}$ (idem pour x_k et y_k) dans (3), on montre que $y_m^{(n)} \to y^{(n)} \in Y_n$, d'où l'on tire que $y_m^{(n+1)} \to Ay^{(n)} = y^{(n+1)} \in Y_{n+1}$ et que Y_{n+1} est fermé. Remarquons que l'on utilise ici la complétude de Y_n (pour déduire la convergence vers $y^{(n)} \in Y_n$ du fait que la suite est de Cauchy), qui est assurée par l'hypothèse de récurrence Y_n fermé. Il nous reste à montrer que (b) est vrai pour $n+1$. On suppose $Y_1 \neq X$. Soit $y^{(n+1)} \in Y_{n+1} \setminus Y_n \neq \emptyset$ (hypothèse de récurrence). Alors $y^{(n+2)} = Ay^{(n+1)} \in Y_{n+2}$ mais $y^{(n+2)} \notin Y_{n+1}$. En effet, l'image réciproque de $y^{(n+2)}$ par A est réduite à un point puisque par hypothèse $\ker A = \{0\}$. Par construction, cette image réciproque $A^{-1}(y^{(n+2)}) = y^{(n+1)}$ n'appartient pas à Y_n.

(c) On suppose que $Y_1 \neq X$. D'après (a)-(b), on a $Y_{n+1}^\perp \cap Y_n \neq \{0\}$ (en effet, Y_{n+1} est un sous-espace fermé strictement inclus dans le sous-espace fermé Y_n, d'où $Y_n = Y_{n+1} \oplus_\perp V$ avec $\dim V \geq 1$). Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $y_n \in Y_{n+1}^\perp \cap Y_n \cap S_0(1)$. Soit $m > n \geq 0$. Vu que $y_n \in Y_{n+1}^\perp$ et que Ay_n appartient à Y_{n+1} (car $y_n \in Y_n$), de même que Ay_m (car $Y_{m+1} \subset Y_{n+1}$) et y_m (car $Y_m \subset Y_{n+1}$), il vient

$$\begin{aligned} \|Ky_n - Ky_m\|_X^2 &= \|Ay_m - Ay_n - y_m + y_n\|_X^2 \\ &= \|Ay_m - Ay_n - y_m\|_X^2 + \|y_n\|_X^2 \\ &\geq 1 \ , \end{aligned} \tag{4}$$

où la dernière inégalité découle de $\|y_n\|_X = 1$. Par conséquent, $(Ky_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente (une telle sous-suite serait de Cauchy, en contradiction avec (4)).

(d) La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question (c) est bornée. Par compacité de K, $(Ky_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit admettre une sous-suite convergeante et nous aboutissons à une contraction. On doit donc forcément avoir $Y_1 \neq X$. Nous avons montré le résultat important suivant.

Conclusion : *Soit $K \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Si $1 \notin \sigma_p(K)$, c'est-à-dire, si l'opérateur $A = 1_X - K$ est injectif, alors A est surjectif (et donc inversible).*

Ce résultat est bien connu pour les opérateurs K sur des espaces vectoriels X de dimensions finies, (qui sont des exemples d'opérateurs compacts), il s'agit alors d'un corollaire du théorème du rang.

Remarque : on peut montrer que réciproquement, si K est compact et $A = 1_X - K$ est surjective, alors A est injective.

7. Nous allons appliquer le résultat ci-dessus au cas de l'opérateur K sur $X = L^2([0,1])$ défini par

$$(Ku)(t) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, k(t,s)u(s) \ , \tag{5}$$

où $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est de carré intégrable, $k \in L^2([0,1]^2)$.

(a) Il est clair que K est linéaire. D'après le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $u \in L^2([0,1])$, Ku est une fonction borélienne et

$$\begin{aligned}
\|Ku\|_X^2 &= \int_0^1 \mathrm{d}t\, |Ku(t)|^2 = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^1 \mathrm{d}s_2\, \overline{k(t,s_1)u(s_1)}k(t,s_2)u(s_2) \\
&\leq \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^1 \mathrm{d}s_2\, |k(t,s_1)|^2 |u(s_2)|^2\right]^{1/2} \times \\
&\qquad\qquad \left[\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s_1 \int_0^1 \mathrm{d}s_2\, |k(t,s_2)|^2 |u(s_1)|^2\right]^{1/2} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s\, |k(t,s)|^2 \|u\|_X^2 \; < \; \infty\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $Ku \in X$, $K \in \mathcal{L}(X)$ et $\|K\|^2_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s |k(t,s)|^2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par densité de l'espace vectoriel des polynômes de 2 variables dans $L^2([0,1]^2)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et un polynôme $p_n(t,s) = \sum_{k+l\leq N} c_{kl}\, t^k\, s^l$ de degré N tel que

$$\|k - p_n\|^2_{L^2} = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s\, |k(t,s) - p_n(t,s)|^2 \leq \frac{1}{n}\,.$$

On pose

$$(K_n u)(t) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, p_n(t,s)u(s) = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{l=0}^{N-k} c_{kl} \int_0^1 \mathrm{d}s\, s^l u(s) \right) t^k\,.$$

Alors $K_n \in \mathcal{L}(X)$ et $\|K - K_n\|^2_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/n$ d'après la question (a). Donc $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers K quand $n \to \infty$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$. De plus, pour tout $u \in X$, $K_n u$ appartient au sous-espace vectoriel de X de dimension finie formé par les polynômes de degrés $\leq N$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $K_n : X \to X$ est un opérateur de rang fini. On admet que si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite dans $\mathcal{L}(X)$ d'opérateurs de rangs finis convergeant vers K pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$, alors K est un opérateur compact. Il découle alors de ce qui précède que l'opérateur K défini par (5) est compact.

(c) Soit $f \in L^2([0,1])$ une fonction fixée. L'équation intégro-différentielle

$$u(t) = (Ku)(t) + f(t) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, k(t,s)u(s) + f(t) \tag{6}$$

admet une unique solution $u = (1_X - K)^{-1} f$ <u>ssi</u> $1_X - K$ est inversible. D'après la question 6, c'est le cas <u>ssi</u> $1 \notin \sigma_p(K)$ <u>ssi</u> $\ker(1_X - K) = \{0\}$. Donc l'équation (6) a une unique solution <u>ssi</u> l'équation homogène $u = Ku$ n'a pas de solution non triviale $u \neq 0$.

Remarque : On peut aussi montrer que l'existence d'une solution de l'équation (6) pour tout $f \in L^2([0,1])$ implique l'unicité de cette solution (voir la remarque à la fin de la question 6).