Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle — Université Joseph Fourier
2014-2015

Examen du 24 juin 2015 (seconde session)

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 4 exercices indépendants.
Durée : 3 heures

Dans tout ce qui suit, on note $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés $X \to X$.

Exercice 1 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $P \in \mathcal{L}(X)$ un projecteur non nul et distinct de l'identité 1_X.

1. Montrer que pour tout $\lambda \notin \{0,1\}$, $\lambda 1_X - P$ est injectif.
2. Montrer que pour tout $\lambda \notin \{0,1\}$, $\lambda 1_X - P$ est surjectif.
3. Montrer que P n'a pas de spectre continu ni de spectre résiduel et a deux valeurs propres 0 et 1, c'est-à-dire,
$$\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0,1\}\ .$$

Exercice 2 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel de X et $G \subset X'$ un sous-espace vectoriel du dual topologique X' de X. On note $\overline{E}$ l'adhérence de E dans $(X, \|\cdot\|_X)$ et $\overline{G}$ l'adhérence de G dans $(X', \|\cdot\|_{X'})$. On définit

$$\begin{aligned} E^\perp &= \big\{ f \in X'\,;\ f(x) = 0 \ \ \forall\, x \in E \big\} \\ G^\perp &= \big\{ x \in X\ ;\ g(x) = 0 \ \ \forall\, g \in G \big\}\ . \end{aligned}$$

1. Montrer que dans le cas particulier où X est un espace de Hilbert, on retrouve les définitions usuelles de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel : plus précisemment, vous vérifierez que
$$\mathcal{I}^{-1}(E^\perp) = (\mathcal{I}(E))^\perp = \{ y \in X\ ;\ \langle y, x\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in E\}\ ,$$
où $\mathcal{I} : y \in X \mapsto f_y \in X'$ est l'isométrie définie par $f_y(x) = \langle y, x\rangle$ pour tout $x, y \in X$.
2. Montrer que $G^\perp$ est un fermé de $(X, \|\cdot\|_X)$.
3. Montrer que $E^\perp$ est un fermé de $(X', \|\cdot\|_{X'})$.
4. Soit $F \subset X$ un autre sous-espace vectoriel de X. Vérifier que $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.
5. Montrer que $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$.
Indication : pour prouver que $(E^\perp)^\perp \subset \overline{E}$ si $\overline{E} \neq X$, vous pourrez utiliser le résultat suivant que vous justifierez : pour tout $x_0 \in X \setminus \overline{E}$, il existe $g_0 \in X'$ telle que $g_0(x_0) = 1$ et $g_0(x) = 0 \ \forall\, x \in E$.
6. On suppose que X est réflexif. Montrer que $(G^\perp)^\perp = \overline{G}$.

Exercice 3 Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $\|\cdot\|_X$ la norme associée au produit scalaire, $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée maximale de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On rappelle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $f \in X'$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

1. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $y \in X$, $\lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) $x_n \rightharpoonup x$ faiblement quand $n \to \infty$;
(ii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et pour tout $i \in I$, $\lim_{n\to\infty}\langle e_i, x_n\rangle = \langle e_i, x\rangle$;
(iii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et il existe $M \subset X$ dense dans X tel que pour tout $y \in M$, $\lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle$.

3. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de X ($(e_i)_n = 1$ si $i = n$ et 0 sinon). Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $\lim_{n\to\infty}\langle e_i, x_n\rangle = \langle e_i, x\rangle \ \forall\, i \in \mathbb{N}$ mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Exercice 4 Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|_X$ la norme sur X induite par le produit scalaire. Étant donné un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(X)$, on considère l'image spectrale $I(A)$ de A définie par

$$I(A) \ = \ \big\{ \, \langle x, Ax\rangle \, ; \, x \in X \, , \, \|x\|_X = 1 \, \big\} \ .$$

On pose

$$k(A) = \sup |I(A)| = \sup_{\|x\|_X=1} |\langle x, Ax\rangle| \ .$$

1. Montrer que $I(A)$ est contenu dans la boule fermée de centre O et de rayon $\|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ du plan complexe.
2. On suppose que A est *auto-adjoint*. Montrer que $k(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.
   Indication : vous pourrez préalablement montrer que pour tout $x, y \in X$,
   $$\mathrm{Re}\big(\langle y, Ax\rangle\big) \ = \ \frac{1}{4}\Big(\big\langle x+y, A(x+y)\big\rangle - \big\langle x-y, A(x-y)\big\rangle\Big) \ .$$
3. On considère à présent un opérateur borné quelconque $A \in \mathcal{L}(X)$ et on note A^* son adjoint.
   (a) Montrer que $\frac{1}{2}(A + A^*)$ et $\frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$ sont des opérateurs auto-adjoints.
   (b) En déduire en utilisant la question 2 que
   $$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2k(A) \quad \forall \ A \in \mathcal{L}(X) \ . \tag{1}$$
   (c) Montrer que si $\dim(X) \geq 2$, la constante 2 dans l'inégalité (1) ne peut pas être remplacée par une constante plus petite.
   Indication : considérer l'application linéaire $A : X \to X$ définie par :
   $$\begin{cases} A(\lambda x + \mu y) & = \lambda y \quad \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \\ Az & = 0 \quad\ \forall\ z \in \{x, y\}^\perp \end{cases} ,$$
   avec $x \in X$ et $y \in X$ deux vecteurs orthogonaux de norme 1.