Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle — Université Joseph Fourier
2014-2015

Examen du 19 mai 2015

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte cinq exercices indépendants.
Durée : 3 heures

Dans tout ce qui suit, on note $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés $X \to X$, $1_X \in \mathcal{L}(X)$ l'opérateur identité et $\sigma(A)$ le spectre de $A \in \mathcal{L}(X)$.

Exercice 1 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ une bijection linéaire bornée $X \to X$. Montrer que le spectre de A^{-1} vaut
$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ ; \ \lambda \in \sigma(A) \right\} .$$
2. On considère un opérateur unitaire $U : X \to X$.
   (a) Montrer que les spectres de U et de U^{-1} sont inclus dans le disque fermé de rayon 1.
   (b) En déduire que $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| = 1\}$.
3. On munit $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ du produit scalaire usuel $\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{u}_n v_n \ \ \forall\, u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et de la norme $\|\cdot\|_2$ induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit S l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, défini par $(Su)_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$.
   (a) Montrer que S est un opérateur unitaire et déterminer son adjoint S^*.
   (b) Montrer que S n'a pas de spectre ponctuel ni de spectre résiduel.
   (c) Pour tous réels $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varepsilon > 0$, on considère le vecteur $v_{\theta,\varepsilon} \in X$ défini par $(v_{\theta,\varepsilon})_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\varepsilon|n|}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\|(S - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}1_X)v_{\theta,\varepsilon}\|_2 \to 0$ et $\|v_{\theta,\varepsilon}\|_2 \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$ et en déduire que $S - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}1_X$ n'est pas une bijection $X \to X$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (d) Conclure de ce qui précède que $\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| = 1\}$.

Exercice 2 Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$ et $p_n : z \in \mathbb{C} \mapsto p_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ une fonction polynôme de degré n. On définit
$$p_n(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 1_X .$$

1. On note $p_n(\sigma(A)) = \{p_n(\lambda) \ ; \ \lambda \in \sigma(A)\}$ l'image du spectre de A par p_n. On veut montrer que le spectre de $p_n(A)$ est
$$\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A)) .$$
   (a) Soit $\mu \in \sigma(p_n(A))$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines complexes de $p_n(z) - \mu$. Montrer qu'au moins une des racines λ_i appartient à $\sigma(A)$, en déduire que $\mu \in p_n(\sigma(A))$.
   (b) Soient $B \in \mathcal{L}(X)$ et $C \in \mathcal{L}(X)$ deux opérateurs bornés. Montrer que si BC et CB sont des bijections $X \to X$, alors B et C sont également des bijections. Trouver un contre-exemple prouvant que cela n'est pas forcément vrai si l'on suppose uniquement que BC est une bijection $X \to X$ (on pourra considérer les opérateurs de décalage à gauche et à droite sur $\ell^2(\mathbb{N})$).
   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si $p_n(\lambda)$ est dans l'ensemble résolvant de $p_n(A)$ alors λ est dans l'ensemble résolvant de A. En conclure que $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A))$.
2. Montrer que si A est auto-adjoint, alors $p_n(A)^* p_n(A) = |p_n|^2(A)$ est auto-adjoint. En déduire que
$$\|p_n(A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p_n(\lambda)| .$$

Exercice 3 Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné *normal*.

1. Montrer que $\ker(A^*) = \ker(A)$. En déduire que $\ker(A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$ est la fermeture de l'image de A.
2. Montrer que A n'a pas de spectre résiduel.

Exercice 4 Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach. Soit $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une forme bilinéaire telle que

$$\begin{cases} x \in X \mapsto f(x,y) & \text{est continue pour tout } y \in Y \\ y \in Y \mapsto f(x,y) & \text{est continue pour tout } x \in X. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que f est continue sur $X \times Y$.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non bilinéaire qui satisfait l'hypothèse (1) mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé de X strictement inclu dans X. On note $(X', \|\cdot\|_{X'})$ le dual de $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(M', \|\cdot\|_{M'})$ le dual de $(M, \|\cdot\|_M)$, où $\|\cdot\|_M$ est la norme induite par $\|\cdot\|_X$ sur M. On définit l'application R qui à tout $f \in X'$ associe sa restriction à M, $R(f) = f|_M$.

1. Montrer que R est une application linéaire bornée $X' \to M'$.
2. Montrer que R est surjective et a pour norme d'opérateur $\|R\|_{\mathcal{L}(X',M')} = 1$.
3. Montrer que R n'est pas injective.
   Indication : utiliser une des conséquences du théorème de Hahn-Banach démontrées en cours.
4. Soit $N = \ker(R)$. On munit l'espace vectoriel quotient X'/N des classes d'équivalence sur X' modulo N (avec $f \sim g$ si et seulement si $f - g \in N$) de la norme suivante :

$$\big\|[f]\big\|_{X'/N} = \inf_{g \in N} \big\|f - g\big\|_{X'} \quad , \quad [f] \in X'/N\ . \tag{2}$$

   (a) Vérifier que (2) définit bien une norme sur X'/N.
   (b) Montrer que l'application $\mathcal{I} : [f] \in X'/N \mapsto R(f)$ est bien définie et que $\mathcal{I}$ est une bijection linéaire continue $(X'/N, \|\cdot\|_{X'/N}) \to (M', \|\cdot\|_{M'})$.
5. On suppose M de codimension finie, c'est-à-dire, $X = M \oplus V$ avec $\dim V < \infty$.
   (a) Montrer qu'il existe un projecteur $P \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\mathrm{Im}(P) = M$ et $\ker(P) = V$.
   (b) Montrer que si $V_0 \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V, alors $M \oplus V_0$ est fermé.
   (c) Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de V et $V_i = \mathrm{vect}(e_j\,;\, j = 1, \ldots, n\,,\, j \neq i)$. A l'aide d'une des conséquences du théorème de Hahn-Banach démontrées en cours, appliquée aux sous-espaces vectoriels $M \oplus V_i$, montrer qu'il existe $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$ tels que :

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M \oplus V_i \\ 1 & \text{si } x = e_i\ . \end{cases}$$

   Montrer que $M = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$.
   (d) Montrer que $\ker(R) = \mathrm{vect}(f_i\,;\, i = 1, \ldots, n)$, en conclure que $\ker(R)$ a une dimension finie égale à n.
6. Soit $X = C([0,1])$ muni de la norme sup, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$, et $M = \{h \in X\,;\, h(0) = h(1) = 0\}$.
   (a) Montrer que M est fermé.
   (b) Montrer que M est de codimension 2. M admet-il un supplémentaire topologique ?
   (c) Déterminer $\ker(R)$.