M1 Université de Grenoble
Analyse fonctionnelle 2014/2015

Partiel

Durée : 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 : Un opérateur d'image dense (8 points)
On se place dans
$$X = c_0(\mathbb{N}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \ , \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$$
muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
1) Justifier que $(X, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (on pourra admettre que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach).
2) On introduit l'ensemble $\mathcal{D} = \{x \in X, \ \{n \in \mathbb{N}/x_n \neq 0\}$ est fini $\}$ des suites nulles, sauf pour un nombre fini de composantes. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans X.
3) On considère l'application linéaire T définie sur X par
$$Tx = T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \left(x_0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n+1}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$
Montrer que T est bien définie et continue de X dans X.
4) Montrer que $T : X \to X$ n'est pas surjective.
5) Montrer que l'image de T est dense dans X.

Exercice 2 : Continuité et noyau fermé (10 points)
Soit X un espace de Banach réel et soit f une forme linéaire (pas forcément continue) sur X. On supposera que $f \not\equiv 0$.
1) Soit $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \neq 0$, montrer que $X =\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{R}x_0$.
2) Montrer que si $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas fermé, alors il est forcément dense dans X.
3) Supposons que f ne soit pas continue, montrer que son noyau n'est pas fermé. *Indication : on pourra considérer une suite (x_n) convergeant vers x telle que $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$. On montrera qu'on peut supposer que $f(x) \neq 0$ et que $f(x_n)$ converge vers $\ell \neq f(x)$. On considèrera alors $y_n = f(x_n)x - f(x)x_n$.*
4) En déduire l'alternative : soit f est continue et $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé, soit f est discontinue et $\mathrm{Ker}(f)$ est dense.

Dans la suite, on se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme canonique.
5) Exhiber une forme linéaire f sur X qui n'est pas continue. *Indication : on pourra utiliser l'existence d'une base algébrique $(b_i)_{i\in I}$ de X.*
6) Soit f une forme linéaire discontinue sur $\ell^1(\mathbb{N})$ et soit T l'application linéaire définie de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$ par
$$T(x) = T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (f(x), x_0, x_1, x_2, \ldots) \ .$$
Montrer que T est une application discontinue mais qui a un noyau fermé et non dense.

T.S.V.P.

Exercice 3 : Convexe fermé (4 points)
Soit X un espace de Banach réel. On appelle « demi-espace fermé » un ensemble du type $D_{f,\alpha} = \{x \in X, f(x) \leq \alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in X'$ une forme linéaire continue sur X. On rappelle une des conséquences du théorème de Hahn-Banach : si C est un convexe fermé et si K est un convexe compact de X disjoint de C, alors il existe un demi-espace fermé $D_{f,\alpha}$ qui contient C et tel que $K \cap D_{f,\alpha} = \emptyset$.

1) Soit C un convexe fermé de X, montrer que C est égal à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.
2) En déduire que C est fermé pour la topologie faible de X (on rappelle que la topologie faible est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires de X' sont continues).