UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER 2012-2013
Master de mathématiques - Analyse Fonctionnelle.

Corrigé du contrôle continu du lundi 29 avril 2013

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{C})$. On considère l'opérateur $T : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ dont la matrice dans la base de Hilbert canonique est $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Montrer que T est un opérateur compact.

Indication : on pourra utiliser les opérateurs T_k de matrices $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_k & 0 \dots \\ 0 & \dots & a_k & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Pour tout entier k on a $||T_k|| = |a_k|$. Donc la série $S_n = \sum_{k=0}^{n} T_k$ converge (absolument) dans $L(l^2(\mathbb{C}))$ vers un opérateur S. La convergence en norme implique la convergence faible (point par point)[1], donc pour tout élément e_k de la base de Hilbert canonique, on a $S(e_k) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(e_k)$. Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(e_k) = T(e_k)$ par définition des matrices, ceci montre que $S = T$, donc que S_n converge vers T dans $L(l^2(\mathbb{C}))$. Comme les opérateurs S_n sont de rang fini, cela montre que T est compact.

Exercice 2

On considère l'espace de Banach $E = C_b^0(\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, continues et bornées, muni de la norme $||\ ||_\infty$.
Soit $T : E \to E$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$.

Déterminer le spectre de T.

Tout d'abord on a $||T|| = 1$, donc $\sigma(T)$ est un compact inclus dans la boule unité de $\mathbb{C}$. Déterminons le spectre ponctuel de T. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \neq 0$ tels que $T(f) = \lambda f$. Comme $T^n(f)(x) = f(x+n) = \lambda^n f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, le fait que $f \neq 0$ et que f est bornée impose que $|\lambda| = 1$. Réciproquement si $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{i\theta x}$ est vecteur propre de T pour la valeur propre λ. On a montré que $\sigma_p(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Remarquons que T est inversible, d'inverse défini par $T^{-1}(f)(x) = f(x-1)$. Pour $\lambda \neq 0$, l'opérateur $T - \lambda \mathrm{Id} = \lambda T(\lambda^{-1}\mathrm{Id} - T^{-1})$ est inversible si et seulement si $T^{-1} - \lambda^{-1}\mathrm{Id}$ est inversible. On a clairement $||T^{-1}|| = 1$, donc $\sigma(T^{-1}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Cela montre que le spectre de T est inclus dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$. Donc $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

---

[1] La convergence en norme dit que $||T - S_n|| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, cela implique que pout tout $x \in l^2(\mathbb{C})$, on a $||(T - S_n)(x)|| \leq ||T - S_n||.||x|| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur continu d'image fermée.

1. Montrer que T induit un isomorphisme (d'espaces de Hilbert) de $(\mathrm{Ker}\, T)^\perp$ sur $\mathrm{Im}\, T$.

On a $H = \mathrm{Ker}\, T \oplus (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$ *donc la restriction de* T *à* $(\mathrm{Ker}\, T)^\perp$ *est une bijection linéaire de* $(\mathrm{Ker}\, T)^\perp$ *sur* $\mathrm{Im}\, T$. *Comme* $\mathrm{Im}\, T$ *est supposée fermé, c'est un espace de Hilbert. Le théorème de l'application ouverte conclut.*

2. Montrer qu'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $x \in (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$, on a $A||x|| \le ||T(x)|| \le B||x||$.

C'est la définition de la continuité de l'isomorphisme précédent et de son inverse.

On note $T^* : H \to H$ l'adjoint de T, défini par $< T(x)|y >=< x|T^*(y) >$ pour tout $x, y \in H$.

3. Montrer que $(\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp = \mathrm{Im}\, T$.

Les définitions donnent que $\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$. *On a donc* $(\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}\, T} = \mathrm{Im}\, T$.

Remarque : on peut aussi utiliser la propriété vue en cours $(\mathrm{Ker}\, T')^\circ = \overline{\mathrm{Im}\, T}$ *sur l'espace de Banach* H *est son dual* H' *puis utiliser l'isomorphisme canonique entre* H' *et* H.

4. Montrer que $\mathrm{Im}\, T^*$ est fermé dans H. Indication : on écrira une suite de $\mathrm{Im}\, T^*$ sous la forme $(T^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \in (\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp$ puis on utilisera les questions précédentes pour montrer que si $(T^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Une suite de $\mathrm{Im}\, T^*$ *peut toujours s'écrire* $(T^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $x_n \in (\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp$ *[d'après la première question]. D'après la question précédente, il existe* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* H *telle que* $x_n = T(y_n)$ *pour tout* n *et on peut prendre* y_n *dans* $(\mathrm{Ker}\, T)^\perp$. *La suite de* $\mathrm{Im}\, T^*$ *s'écrit donc sous la forme* $(T^*T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. *On a* $< T^*T(y_n - y_m), y_n - y_m >= ||T(y_n - y_m)||^2 \le ||T^*T(y_n - y_m)||.||y_n - y_m||$. *D'après la question 2, on a* $A||y_n - y_n||^2 \le ||T(y_n - y_m)||^2$. *Donc* $A||y_n - y_n||^2 \le ||T^*T(y_n - y_m)||.||y_n - y_m||$, *et* $A||y_n - y_m|| \le ||T^*T(y_n - y_m)||$. *Ceci montre que si* $(T^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (T^*T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy, alors* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* H, *donc converge. Dans ces conditions la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et donc* $(T^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathrm{Im}\, T^*$.

5. Montrer que T est de Fredholm si et seulement si T^* est de Fredholm. Que peut-on dire des indices de T et T^* ?

On a $\mathrm{Ker}\, T = (\mathrm{Im}\, T^*)^\perp$, *donc avec la question précédente, on a* $\mathrm{Im}\, T^* = \overline{\mathrm{Im}\, T^*} = (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$. *Ceci montre que* $H = \mathrm{Im}\, T^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, T$. *On a établi de même que* $H = \mathrm{Im}\, T \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, T^*$. *Ceci montre que* T *est de Fredholm si et seulement si* T^* *est de Fredholm, et on a alors* $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\, T^*) = \dim\,(\mathrm{Ker}\, T)$ *et* $\dim\,(\mathrm{Ker}\, T^*) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\, T)$, *d'où* $\mathrm{ind}\, T^* = -\mathrm{ind}\, T$.

Exercice 4

Soient T, S deux endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel E.

1. a. À l'aide d'inclusions, montrer que si le noyau de ST est de dimension finie et si l'image de TS est de codimension finie, alors T est un opérateur à indice.

On a $\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Ker}\,(ST)$ *et* $\mathrm{Im}\,(TS) \subset \mathrm{Im}\, T$, *donc le passage au quotient induit une surjection* $j : \mathrm{Coker}\,(TS) \to \mathrm{Coker}\, T$. *Ceci montre que* $\dim\,(\mathrm{Ker}\, T) \le \dim\,(\mathrm{Ker}\,(ST)$ *et* $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,(T)) \le \mathrm{codim}\,(\mathrm{Im}\,(TS))$.

b. En déduire que si TS et ST sont des opérateurs à indice, alors T et S sont des opérateurs à indice.

C'est immédiat.

2. a. Construire des opérateurs “naturels” i, j, $\overline{T}$, $\overline{S}$ rendant exactes les deux suites :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{i} \operatorname{Ker} ST \xrightarrow{\overline{T}} \operatorname{Ker} S,$$

$$\operatorname{Coker} T \xrightarrow{\overline{S}} \operatorname{Coker} ST \xrightarrow{j} \operatorname{Coker} S \longrightarrow 0.$$

On prend pour i l'inclusion et pour j le passage au quotient (par $\operatorname{Im} T/\operatorname{Im}(TS)$*). L'opérateur T envoie* $\operatorname{Ker} ST$ *dans* $\operatorname{Ker} S$ *donc il induit par restriction* $\overline{T} : \operatorname{Ker} ST \to \operatorname{Ker} S$*. De même l'opérateur S envoie un élément de* $\operatorname{Im} T$ *sur un élément de* $\operatorname{Im} ST$*, donc il induit un opérateur* $\overline{S} : \operatorname{Coker} T \to \operatorname{Coker} ST$*. Le fait que la première suite soit exacte est immédiat. Pour la seconde, on a déjà noté que j était surjective. L'inclusion* $\operatorname{Im} \overline{S} \subset \operatorname{Ker} j$ *est claire. Le noyau de j est formé des classes* $x + \operatorname{Im} ST$ *modulo* $\operatorname{Im} ST$ *contenues dans* $\operatorname{Im} S$*, i.e. de la forme* $S(y) + \operatorname{Im} ST$ *(on rappelle que* $\operatorname{Im} ST \subset \operatorname{Im} S$*). Cela montre que* $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} \overline{S}$ *et la deuxième suite est donc exacte.*

b. En déduire que T, S sont des opérateurs à indice si et seulement si TS et ST sont des opérateurs à indice.

Si T et S sont à indice, les espaces vectoriels qui encadrent $\operatorname{Ker} ST$ *et* $\operatorname{Coker} ST$ *dans les suites exactes précédentes sont de dimension finie. Donc* $\operatorname{Ker} \overline{T}$ *et* $\operatorname{Im} \overline{T}$ *sont de dimension finie et cela impose que* $\operatorname{Ker} ST$ *est de dimension finie. De même la deuxième suite exacte impose que* $\operatorname{Coker} ST$ *est de dimension finie. En échangeant S et T dans les suites exactes, cela montre que ST et TS sont à indice.*