UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER 2012-2013

Master de mathématiques - Analyse Fonctionnelle.

Corrigé du contrôle continu du lundi 11 mars 2013

Exercice 1

Soit $(E, || \, ||)$ un espace vectoriel normé. On note $E' = L(E, \mathbb{C})$ le dual topologique de E, muni de la norme d'opérateur linéaire. On rappelle que E' est un espace de Banach. On note E'' le dual de E', appelé bidual (topologique) de E.

On note $J : E \to E''$ l'application définie par $J(x) : y \to y(x)$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in E'$ telle que $y(x) = ||x||$ et $|y(z)| \leq ||z||$ pour tout $z \in E$.

Soit $x \in E$. Considérons la forme linéaire sur $F = \mathrm{vect}\{x\}$ définie par $t(x) = ||x||$. Pour tout $y \in F$, on a $|t(y)| = ||y||$. Donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $y \in E'$ prolongeant t et telle que $|y(z)| \leq ||z||$ pour tout $z \in E$. Cette forme répond à la question.

2. En déduire que pour tout $x \in E$, on a $||x|| = \max\{y(x),\ y \in E',\ ||y|| \leq 1\}$.

Soit $x \in E$. Pour tout $y \in E'$ telle que $||y|| \leq 1$, on a $|y(x)| \leq ||y||.||x|| = ||x||$. D'après la question 1 il existe une forme linéaire y de norme 1 réalisant l'égalité $y(x) = ||x||$. Cela montre le résultat demandé.

3. Montrer que J est un plongement linéaire isométrique (c'est-à-dire tel que $||J(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E$).

La vérification que J est linéaire est immédiate (linéarité des éléments de E'). Pour tout $x \in E$, on a $||J(x)|| = \sup\{J(x)(y),\ y \in E',\ ||y|| \leq 1\} = \sup\{y(x),\ y \in E',\ ||y|| \leq 1\} = ||x||$ d'après la question précédente. Ceci montre que $||J(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E$. Une isométrie étant injective, cela conclut.

Les questions suivantes sont des applications des questions précédentes.

4. Montrer que pour toute partie M de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. M est bornée dans E.

b. Pour tout $y \in E'$, l'ensemble $y(M) = \{y(x) \mid x \in M\}$ est borné.

Indication : utiliser $J(M)$.

a $\Rightarrow$ **b** *est évident :* $\sup y(M) \leq ||y|| \sup\{||x||,\ x \in M\}$.

La propriété **b** *exprime que pour tout élément $y \in E'$, la partie $\{X(y),\ X \in J(M)\}$ est bornée. Comme E' est un espace de Banach, on peut appliquer le principe de la borne uniforme : la famille $J(M)$ est bornée dans $E'' = L(E', \mathbb{C})$. Comme J est une isométrie, cela montre que M est bornée dans E.*

5. On suppose que $|| \, ||_1$ et $|| \, ||_2$ sont deux normes sur E telles que $E_1 = (E, || \, ||_1)$ et $E_2 = (E, ||.||_2)$ ont mêmes duaux topologiques (c'est-à-dire toute forme linéaire sur E continue pour une norme est continue pour l'autre norme).

a. Montrer que l'application identité $I : E_1' \to E_2'$ est continue. Indication : utiliser le théorème du graphe fermé.

Montrons que le graphe de l'identité $\mathcal{G}(I)$ est fermé dans $E_1' \times E_2'$. Soit $((f_n, f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{G}(I)$ convergeant dans $E_1' \times E_2'$ vers (f, g). Cela signifie que $||f_n - f||_{E_1'} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $||f_n - g||_{E_2'} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme la convergence en norme des formes linéaires entraîne la convergence ponctuelle, cela implique que pour tout $x \in E$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ dans $\mathbb{C}$, donc $f(x) = g(x)$. Ceci montre que $f = g$, donc (f, g) appartient à $\mathcal{G}(I)$, ce qu'il fallait montré. D'après le théorème du graphe fermé (E_1' et E_2' sont deux espaces de Banach), ceci montre que I est continue.

b. En déduire que les normes de E_1' et E_2' sont équivalentes.

La continuité de I implique qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $y \in E'$, on a $||y||_{E_2'} \leq C||y||_{E_1'}$. En considérant I^{-1}, la même preuve que précédemment montre l'inégalité dans l'autre sens (on peut aussi invoquer le théorème de l'application ouverte pour I).

c. En déduire que les normes $|| \ ||_1$ et $|| \ ||_2$ sur E sont équivalentes.

On utilise la question **2.** *Pour tout $x \in E$, on a :*
$||x||_1 = \max\{y(x),\ y \in E',\ ||y||_{E_1'} \leq 1\} \leq \max\{y(x),\ y \in E',\ ||y||_{E_2'} \leq C\} = C||x||_2$. *L'inégalité dans l'autre sens se montre en échangeant les deux normes.*

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert.
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de H telle que pour tout $x \in H$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |<x|e_n>|^2 < +\infty$.

1. Montrer à l'aide du principe de la borne uniforme que la suite $(||e_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On considère la famille $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires continues sur H définies par $\phi_n(x) =< x|e_n >$. On sait (par Cauchy-Schwarz) que $||\phi_n|| = ||e_n||$. Comme pour tout $x \in E$ la suite $(\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l^2, cette suite converge vers 0 et est en particulier bornée. Par le principe de la borne uniforme, cela montre que la suite $(||\phi_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'où le résultat.

2. Montrer à l'aide du théorème du graphe fermé qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in H$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |<x|e_n>|^2 \leq C||x||^2$.

Considérons l'application linéaire $T : H \to l^2$ définie par $T(x) = (< x|e_n >)_{n\in\mathbb{N}}$. La question revient à montrer que cette application est continue. Comme H et l^2 sont complets, on va utiliser le théorème du graphe fermé. Montrons que le graphe de T est fermé. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans H et $T(x_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$ dans l^2. On veut montrer que $a = (< x|e_n >)_{n\in\mathbb{N}}$. Quitte à retrancher x aux x_k, on peut supposer $x = 0$ et on veut montrer que $a = 0$. Comme la convergence dans l^2 implique la convergence ponctuelle, $T(x_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$ dans l^2 implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $< x_k|e_n > \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a_n$. Or $| < x_k|e_n > | \leq ||x_k||.||e_n||$. Comme la suite x_k tend vers 0 dans E et la suite $(||e_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela montre que $a_k = 0$ pour tout k.