UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER 2013-2014
Master de mathématiques - Analyse Fonctionnelle.

Éléments de correction d'exercices des examen terminaux de 2012

Exercice 1 *(Examen 2012, première session, exercice 1)*
On définit sur l'espace de Banach $l^1_{\mathbb{C}}$ le produit suivant : si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $a * b = c$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout entier n.

1. Montrer que $||a * b|| \leq ||a||.||b||$ et que $l^1_{\mathbb{C}}$ porte une structure d'algèbre de Banach commutative dont l'élément neutre pour la multiplication $*$ est $e_0 = (1, 0, 0, ...)$.

Le fait que $||a * b|| \leq ||a||.||b||$ résulte de la preuve (non demandée) du fait que $a * b \in l^1_{\mathbb{C}}$. Le produit $*$ est un produit de convolution (on peut prolonger par 0 les éléments de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ pour en faire des éléments de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ et profiter de la structure de groupe additif de $\mathbb{Z}$). Les propriétés demandées sont générales aux produits de convolution et faciles à vérifier. On peut aller relativement vite en examen, si on est sûr de soi bien sûr.

2. Soit $e_1 = (0, 1, 0, 0, ...)$. Calculer e_1^n et montrer que $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_1^n$ pour tout $a \in l^1_{\mathbb{C}}$.

Un calcul immédiat donne $e_1^n = e_n$ et une majoration immédiate du reste montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_1^n$ converge vers a pour tout $a \in l^1_{\mathbb{C}}$.

3. a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$. Montrer que la formule $\chi_z(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ définit un caractère sur $l^1_{\mathbb{C}}$.

Il est clair que χ_z est linéaire. Le fait que c'est un morphisme d'anneaux résulte de la formule du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

b. Réciproquement, soit $\chi : l^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ un caractère et posons $z = \chi(e_1)$. Montrer que $\chi = \chi_z$. En déduire que le spectre $X(l^1_{\mathbb{C}})$ de $l^1_{\mathbb{C}}$ s'identifie au disque $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Cela résulte de la question 2, par passage à la limite du fait que $\chi(\sum_{k=0}^{n} a_k e_1^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \chi(e_1^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n$. Avec la question précédente, cela montre que $\chi \mapsto \chi(e_1)$ est une bijection. Il est clair que c'est un homéomorphisme de $X(l^1_{\mathbb{C}})$ muni de la topologie faible-$*$ dans $\overline{\mathbb{D}}$, puisque c'est une bijection, clairement continue (par définition de la topologie sur $X(l^1_{\mathbb{C}})$) et $X(l^1_{\mathbb{C}})$ est compact.

Attention : ne pas oublier de vérifier que l' "identification" demandée se fait par homéomorphisme, puisqu'on identifie dans les questions suivantes $C^0(X(l^1_{\mathbb{C}}))$ avec $C^0(\mathbb{D})$.

4. Montrer que l'homomorphisme de Gelfand $\mathcal{G} : l^1_{\mathbb{C}} \to C^0(\overline{\mathbb{D}})$ défini par $a \mapsto (z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n)$ est injectif mais non surjectif.

Le morphisme $\mathcal{G}$ envoie une suite $(a_n) \in l^1_{\mathbb{C}}$ sur la fonction $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ analytique sur le disque unité ouvert et continue sur disque unité fermé. Cette application $\mathcal{G}$ est injective puisque la fonction holomorphe caractérise les coefficients du développement analytique. Il est clair que $\mathcal{G}$ ne se surjecte pas sur $C^0(\overline{\mathbb{D}})$: prendre une fonction continue non analytique sur le disque.

5. Soit $\mathcal{F} : l^1_{\mathbb{C}} \to l^\infty_{\mathbb{C}}$ l'application définie par $\mathcal{F}(a) = (\mathcal{G}(a)(e^{in}))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach injectif et non surjectif.

Pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{D}$, l'application de $C^0(\overline{\mathbb{D}})$ dans $l^\infty_{\mathbb{C}}$ qui envoie une fonction continue f sur la suite $(f(x_n))$ est un morphisme d'algèbres de Banach (même preuve que $f \mapsto f(x_0)$ de $C^0(\overline{\mathbb{D}})$ dans $\mathbb{C}$). Par composition, $\mathcal{F}$ est un morphisme d'algèbres de Banach. L'injectivité provient :

- de la densité de la suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ sur le cercle unité, qui fait que la suite $(\mathcal{G}(a)(e^{in}))_{n\in\mathbb{N}}$ détermine entièrement la restriction de $\mathcal{G}(a)$ au cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,

- et du fait qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ est, par le principe du maximum, entièrement déterminée par sa restriction au cercle unité : si $f_{|\mathbb{S}^1} = g_{|\mathbb{S}^1}$, alors $(f-g)_{|\mathbb{S}^1} = 0$, donc sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ la fonction continue $|f-g|$ présente un maximum local dans $\mathbb{D}$, donc par le principe du maximum pour les fonctions holomorphes, $f - g = 0$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Ainsi $\mathcal{F}(a)$ détermine $\mathcal{G}(a)$ sur le cercle unité, qui détermine $\mathcal{G}(a)$ sur le disque, qui détermine a.

La non surjectivité provient de la densité de la suite $(e^{in})_{n\geq 1}$ sur le cercle unité : si la suite $(1, 0, 0, ...)$ était l'image d'un élément $a \in l^1_{\mathbb{C}}$ par $\mathcal{F}$, la densité de $(e^{in}))_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{S}^1$ imposerait $\mathcal{G}(a) = 0$ par continuité de $\mathcal{G}(a)$, ce qui contredirait $\mathcal{G}(a)(1) = 1$.

Exercice 2 *(Examen 2012, deuxième session, exercice 4)*

1. Soit A une algèbre de Banach. On note $\mu : A \to L(A, A)$ l'application définie par $\mu(a)(x) = ax$. Montrer que μ est un homomorphisme d'algèbres de Banach et que pour tout $a \in A$ on a :

$$\sigma_A(a) = \sigma_{L(A,A)}(\mu(a)).$$

La vérification du morphisme d'algèbre de Banach est immédiate. Il en découle que $\sigma_{L(A,A)}(\mu(a)) \subset \sigma_A(a)$, puisque si a est inversible dans A d'inverse b, alors $\mu(a)$ est inversible dans $L(A, A)$, d'inverse $\mu(b)$ (on applique cela à $a - \lambda 1_A$). Réciproquement supposons que $\mu(a)$ est inversible dans $L(A, A)$. Alors $1_A \in \operatorname{Im} \mu(a)$, ce qui signifie que a possède un inverse à droite b. Notons B l'inverse de $\mu(a)$. Pour tout $x \in A$ on a $B\mu(a)(x) = B(ax) = x$. Pour tout $x \in A$, notons $f(x) = bx$. En multipliant par a à gauche, cela donne $af(x) = abx = x$, donc $f(x) = B(af(x)) = B(x)$ pour tout $x \in A$. Ceci montre que B est de la forme $x \mapsto bx$, et donc que a et b sont inverses dans A.

2. Soit A un $\mathbb{C}$-espace de Banach muni d'une structure d'algèbre. On suppose que pour tout $a \in A$, les multiplications $\mu(a) : x \to ax$ et $\rho(a) : x \to xa$ de A dans A sont continues.

a. Montrer que $||a|| := ||\mu(a)||$ définit une structure d'algèbre normée sur A, i.e. $||.||$ est une norme sur A vérifiant $||1_A|| = 1$ et $||ab|| \leq ||a||.||b||$ pour tout $a, b \in A$, 1_A désignant le neutre de A.

Vérification facile.

b. Montrer que $|a| \leq |1_A|.||a||$ pour tout $a \in A$.

$|a| = |\mu(1_A)| \leq |1_A|.||a||$ *par définition de la norme d'opérateur* $||a||$.

c. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $(||a_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que les deux normes $|.|$ et $||.||$ sont équivalentes.

D'après le principe de la borne uniforme, il suffit de montrer que $(\mu(a_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in A$ pour montrer que $(||\mu(a_n)||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Autrement dit il suffit de montrer que $(a_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in A$ pour montrer que $(||a_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour $x \in A$, le fait que $(a_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée résulte du fait que $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et de la continuité de l'application linéaire $\rho(x)$.

Cela implique qu'il existe une constante $C > 0$ *telle que* $||a|| \leq C|a|$ *pour tout* $a \in A$ *(sinon on peut construire une suite* (a_n) *bornée pour* $|.|$ *mais pas pour* $||.||$*). Avec la question précédente, cela montre que les deux normes* $|.|$ *et* $||.||$ *sont équivalentes.*