Master 1 "Mathématiques, Informatique", MAT403 — Université J. Fourier
2007-2008

Devoir surveillé N^o 1, mercredi 7 novembre 2007

Documents autorisés (à l'exclusion de toute autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : **2 heures.**
Les deux exercices sont indépendants à l'exception des questions 5 et 7 de l'exercice 2 qui font appel à des résultats de l'exercice 1.

Exercice 1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $E \subset X$ un sous-espace vectoriel de X et $G \subset X'$ un sous-espace vectoriel du dual topologique X' de X. On note $\overline{E}$ (respectivement $\overline{G}$) l'adhérence de E dans $(X, \|\cdot\|)$ (de G dans $(X', \|\cdot\|_{X'})$) et

$$\begin{aligned} E^\perp &= \big\{ f \in X' ;\ f(x) = 0 \ \ \forall\, x \in E \big\} \\ G^\perp &= \big\{ x \in X \ ;\ g(x) = 0 \ \ \forall\, g \in G \big\} . \end{aligned}$$

1. Montrer que $E^\perp$ et $G^\perp$ sont respectivement des fermés de $(X', \|\cdot\|_{X'})$ et de $(X, \|\cdot\|)$.
2. Soit $F \subset X$ un autre sous-espace vectoriel de X. Vérifier que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.
3. Montrer que $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$.
   Indication : pour prouver que $(E^\perp)^\perp \subset \overline{E}$ si $\overline{E} \neq X$, on pourra montrer que si $x_0 \in X \setminus \overline{E}$, il existe une forme linéaire $f_0 \in X'$ telle que $f_0(x_0) \neq 0$ et $f_0(x) = 0 \ \forall\, x \in E$.
4. On suppose que X est réflexif. Montrer que $(G^\perp)^\perp = \overline{G}$.

Exercice 2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'algèbre de Banach des applications linéaires bornées $X \to X$. Pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ et $N \in \mathbb{N}^\star$, on considère la somme :

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^n \ \in \mathcal{L}(X)$$

avec $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{n \text{ fois}}$ pour $n \geq 1$ et $A^0 = \mathrm{Id}_X$. Dans tout l'exercice, on suppose que

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty \ . \tag{1}$$

1. (a) Trouver une majoration de la norme de A (de la forme $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq a$ avec $a > 0$ convenablement choisi) qui implique la condition (1).
   (b) Montrer que $\sup_{N \in \mathbb{N}^\star} \|S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M < \infty$.
   (c) Montrer que $\lim_{N \to \infty} \|AS_N - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ et $\lim_{N \to \infty} \|S_N A - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.
2. Montrer que
   $$Y = \big\{ y \in X \ ;\ \lim_{N \to \infty} S_N\, y \ \ \text{existe} \ \big\}$$
   est un sous-espace vectoriel *fermé* de X.
3. Pour tout $y \in Y$, on définit $Py = \lim_{N \to \infty} S_N\, y$.
   Soit $F = \ker(A - \mathrm{Id}_X) = \{x \in X \ ;\ Ax = x\}$ le sous-espace vectoriel de X des points fixes de A.
   (a) Montrer que P est une application linéaire bornée $Y \to X$, de norme $\|P\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$.
   (b) Montrer que l'image $P(Y)$ de P est incluse dans F.
   (c) En déduire que P est un projecteur sur $F \subset Y$ et que $AP = PA = P$.

4. Soit $H = \overline{\mathrm{Im}(A - \mathrm{Id}_X)}$. Montrer que $F \cap H = \{0\}$ (on se servira des résultats de la question 1).

5. Soit $F^* = \ker(A^* - \mathrm{Id}_{X'}) \subset X'$ l'espace vectoriel des points fixes de l'application duale A^* de A (on rappelle que $A^* : f \in X' \mapsto f \circ A \in X'$). Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

   (i) $y \in H$;

   (ii) $y \in Y$ et $Py = 0$;

   (iii) $f(y) = 0$ pour tout $f \in F^*$.

   Indications : On pourra montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour prouver (iii) $\Rightarrow$ (i), on peut par exemple utiliser les résultats de l'exercice 1 et la relation $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ pour $T \in \mathcal{L}(X)$ (cf. feuille de TD 2).

6. Déduire des questions 4 et 5 que $Y = F \oplus H$.

7. On suppose que X est réflexif. En s'aidant de l'exercice 1 et des relations $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$ pour $T \in \mathcal{L}(X)$ (que l'on ne démontrera pas, cf. feuille de TD 2), prouver que $(F \oplus H)^\perp = \{0\}$. En déduire que $X = F \oplus H = Y$.

8. Soit $x \in X$, X non nécessairement réflexif. On définit l'enveloppe convexe de $\{x, Ax, A^2x, \ldots\}$ par :
$$C_x = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} t_n A^n x \ ; \ N \in \mathbb{N}^\star, (t_0, \ldots, t_{N-1}) \in \mathbb{R}_+^N, \ \sum_{n=0}^{N-1} t_n = 1 \right\} \subset X \ .$$
   Démontrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

   (I) $x \in Y$ et $z = Px$;

   (II) la suite $(S_N x)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ admet une suite-suite convergeant faiblement vers z;

   (III) $\overline{C_x} \cap F \neq \emptyset$ et $z \in \overline{C_x} \cap F$.

   Peut-on utiliser l'équivalence (I) $\Leftrightarrow$ (II) pour retrouver le résultat de la question 7 dans le cas particulier où X est réflexif?

   Indications : Pour montrer que (II) $\Rightarrow$ (III), utiliser le résultat suivant démontré en TD :

   tout sous-ensemble convexe fermé de $(X, \|\cdot\|)$ est faiblement fermé.

   Pour prouver (III) $\Rightarrow$ (I), généraliser la question 1(c) en montrant que $\lim_{N\to\infty} \|S_N A^n - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{N\to\infty} \|S_N u - S_N x\| = 0$ pour tout $u \in C_x$.