Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 Université J. Fourier

2007-2008

**Corrigé du devoir surveillé du 7 novembre**

**Exercice 1.** [7 points]

1. Pour tout $g \in X'$, $\ker g$ est un fermé de $(X, \|\cdot\|)$ (car $g$ est continue). Donc $G^\perp = \bigcap_{g\in G} \ker g$ est fermé (comme intersection de fermés). De même, si $x \in X$, la forme linéaire $\varphi_x$ sur $X'$ définie par $\varphi_x(f) = f(x)$ $\forall\, f \in X'$ est continue (cf. cours), donc $\ker\varphi_x$ et $E^\perp = \bigcap_{x\in E}\ker\varphi_x$ sont des fermés de $(X', \|\cdot\|_{X'})$.

2. $f \in (E+F)^\perp \;\Leftrightarrow\; f(x+y) = 0 \;\forall\,(x,y)\in E\times F \;\Leftrightarrow\; f(x) = -f(y) \;\forall\,(x,y)\in E\times F \quad (*)$.
L'affirmation $(*)$ appliquée à $(x,y) = (x,0) \in E\times F$ implique $f(x) = 0$ $\forall\, x \in E$, c'est-à-dire, $f \in E^\perp$. De même, en prenant $(x,y) = (0,y) \in E\times F$ dans $(*)$ on obtient $f \in F^\perp$. Réciproquement, si $f \in E^\perp \cap F^\perp$ alors $f(x) = f(y) = 0$ $\forall\,(x,y)\in E\times F$ et donc $(*)$ est satisfaite. D'où $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.

3. $E^{\perp\perp} = \{x \in X\,;\, f(x) = 0 \;\forall\, f \in X', f|_E = 0\}$ est fermé d'après la question 1 et contient $E$. Donc $\overline{E} \subset E^{\perp\perp}$. Pour montrer l'inclusion inverse, on peut supposer que $\overline{E} \neq X$ (le cas $\overline{E} = X$ est évident). Soit $x_0 \in X\setminus\overline{E}$ et $f_0$ la forme linéaire définie sur $E \oplus \mathbb{K}\,x_0$ par $f_0(x+\lambda x_0) = \lambda$ $\forall\,(x,\lambda)\in E\times\mathbb{K}$. On a montré en TD (feuille 3, exercice 1) que, puisque $x_0 \in$ l'ouvert $X\setminus\overline{E}$, $f_0$ est bornée sur $E\oplus\mathbb{K}\,x_0$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre $f_0$ en une forme linéaire bornée $\tilde f_0$ définie sur tout $X$. On a alors $\tilde f_0|_E = f_0|_E = 0$ et $\tilde f(x_0) = f(x_0) = 1$, d'où $\tilde f_0 \notin E^{\perp\perp}$. Ainsi $X\setminus\overline{E} \subset X\setminus E^{\perp\perp}$, c'est-à-dire, $E^{\perp\perp}\subset\overline{E}$. Ceci prouve que $E^{\perp\perp} = \overline{E}$.

4. Notons $J : x \mapsto \varphi_x$ l'isométrie canonique $X \hookrightarrow X''$, où $\varphi_x$ est défini plus haut. Si $X$ est réflexif, $J$ est surjective et l'on peut identifier $X$ avec $X'' = J(X)$ et $G^\perp$ avec $J(G^\perp) = \big\{\varphi \in X''\;;\;\varphi(g) = 0 \;\forall\, g\in G\big\}$. Ainsi, si l'on remplace $X$ par $X'$, $X'$ par $X''$ et $E$ par $G$ dans les définitions de l'énoncé, le nouvel espace $G^\perp$ ainsi obtenu coïncide à l'isométrie $J$ près avec celui utilisé antérieurement. On peut donc appliquer le résultat de la question 3 en prenant $(X', \|\cdot\|'_X)$ comme espace de départ (au lieu de $(X,\|\cdot\|)$), pour conclure que $G^{\perp\perp} = \overline{G}$.

**Exercice 2.** [19 points]

*Le but de cet exercice est de généraliser le théorème ergodique de von Neumann (cf. feuille de TD 6, exercice 5). Selon ce théorème, si $A = U$ est une application linéaire unitaire d'un espace de Hilbert dans lui-même et $S_N$ est la somme de Cesàro*

$$S_N = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} A^n\,,$$

*alors pour tout $x \in X$, $S_N\,x \to Px$ quand $N\to\infty$, où $P$ est le projecteur sur $F = \ker(A-\mathrm{Id})$. Dans le cas d'une application linéaire $A : X \to X$ avec $X$ un espace de Banach et $\|A^n\|$ borné uniformément en $n$, $S_N x$ ne converge pas forcément pour tout $x \in X$ (à moins que $X$ soit réflexif), mais l'on a un résultat analogue sur le sous-espace $Y \subset X$ où il y a convergence. De plus, il suffit d'avoir la convergence faible d'une sous-suite de $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ pour conclure que $x \in Y$.*

1. (a) Si $\|A\| \le 1$ alors $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^\star}\|A^n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}^\star}\|A\|^n \le 1 < \infty$.

   (b) $\sup_{N\in\mathbb{N}^\star}\|S_N\| \le \sup_{N\in\mathbb{N}^\star}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\|A^n\| \le M < \infty$.

(c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$AS_N - S_N = S_N A - S_N = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N-1} A^n\right) = \frac{1}{N}\left(A^N - \mathrm{Id}\right) .$$

Donc $\|AS_N - S_N\| = \|S_N A - S_N\| \leq N^{-1}(M+1) \to 0$ quand $N \to \infty$.

2. $Y$ est un sous-espace vectoriel de $X$ par linéarité des applications $S_N$ et de la limite. Montrons que $Y$ est fermé. Soit $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans $Y$ convergeant vers $y \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m$ tel que $\|y - y_m\| \leq \varepsilon/(4M)$. Dans ce qui suit, on choisit un tel $m$ *fixé*. Comme $(S_N\, y_m)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N, N' \geq N_0 \Rightarrow \|(S_N - S_{N'})y_m\| \leq \varepsilon/2$

$$\Rightarrow\ \|(S_N - S_{N'})y\| \leq \|S_N - S_{N'}\|\|y - y_m\| + \|(S_N - S_{N'})y_m\| \leq 2M\|y - y_m\| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon .$$

Par conséquent, $(S_N y)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy et donc converge. D'où $y \in Y$ et $Y$ est fermé.

3. (a) $P : y \in Y \mapsto \lim\limits_{N\to\infty} S_N\, y \in X$ est linéaire par linéarité de $S_N$ et de la limite. Il s'agit d'une application linéaire bornée car $\|Py\| = \lim\limits_{N\to\infty} \|S_N y\| \leq \limsup\limits_{N\to\infty} \|S_N\|\|y\| \leq M\|y\|\ \forall\, y \in Y$.

(b) Soit $y \in Y$. D'après la définition de $P$ et la continuité de $A$,

$$\|APy - Py\| = \lim_{N\to\infty} \|AS_N\, y - S_N\, y\| \leq \lim_{N\to\infty} \|AS_N - S_N\|\|y\| = 0$$

d'après 1(c). Par conséquent, $Py \in F = \ker(A - \mathrm{Id})$. D'où $P(Y) \subset F$.

(c) Si $z \in F$ alors $A^n z = z$ et $S_N z = z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. Ceci montre que $F \subset Y$ et que $P|_F = \mathrm{Id}_F$. Comme de plus $P(Y) \subset F$, il vient $P^2 y = \mathrm{Id}_F(Py) = Py$ pour tout $y \in Y$. On a vu en (b) que $APy = Py$ pour tout $y \in Y$. Un argument analogue montre que $PAy = Py$ (utiliser la seconde limite dans 1(c)). Ainsi $P^2 = P = AP = PA$. En particulier, $P : Y \to Y$ est un projecteur. Comme $P(Y) \subset F$ d'après (b) et $P(F) = F \subset P(Y)$ (car $P|_F = \mathrm{Id}_F$ et $F \subset Y$), l'image de ce projecteur vaut $\mathrm{Im}(P) = P(Y) = F$.

4. Soit $y \in H = \overline{\mathrm{Im}(A - \mathrm{Id})}$. Il existe une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $Ax_m - x_m \to y$. D'après 1(c), pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|S_N(Ax_m - x_m)\| \leq \|S_N A - S_N\|\|x_m\| \to 0$ quand $N \to \infty$. Donc $Ax_m - x_m \in Y$ et $P(Ax_m - x_m) = 0$. Puisque $Y$ est fermé et $P$ est continue sur $Y$, il s'ensuit que $y \in Y$ et $Py = 0$. On a donc prouvé que $H \subset Y$ et $P|_H = 0$. Cela entraîne $F \cap H = \{0\}$ (en effet, $P|_F = \mathrm{Id}_F$ d'où $z \in F \cap H \Rightarrow Pz = z = 0$).

5. (i) $\Rightarrow$ (ii) a été démontré dans la question précédente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons que $y \in Y$ et $Py = 0$. Soit $f \in F^* = \ker(A^* - \mathrm{Id}_{X'})$. Alors $f = A^* f = f \circ A = f \circ A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité et continuité de $f$, il en résulte que

$$f(y) = f(S_N y) = \lim_{N\to\infty} f(S_N y) = f(Py) = 0 .$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (i). Avec les notations de l'exercice 1, (iii) s'écrit $y \in (F^*)^\perp$. Or $F^* = \ker((A - \mathrm{Id})^*) = \mathrm{Im}(A - \mathrm{Id})^\perp$ (cf. feuille de TD 2, exercice 1). En vertu du résultat de la question 3 de l'exercice 1, on en déduit que $(F^*)^\perp = (\mathrm{Im}(A - \mathrm{Id}))^{\perp\perp} = H$, d'où (iii) $\Leftrightarrow$ (i).

6. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) montre que $H \subset Y$ et $H = \ker(P)$. D'après la question 3, $P : Y \to Y$ est un projecteur d'image $\mathrm{Im}(P) = F \subset Y$. Donc $Y = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P) = F \oplus H$.

7. On veut montrer que si $X$ est réflexif alors $Y = X$, c'est-à-dire, la suite $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ converge pour tout $x \in X$. Il suffit de montrer que $Y^\perp = \{0_{X'}\}$ où $0_{X'}$ est la forme linéaire nulle sur $X$. En effet, puisque $Y$ est fermé cela impliquera $Y = Y^{\perp\perp} = \{0_{X'}\}^\perp = X$ par l'exercice 1 (de manière alternative, on peut invoquer le corollaire du théorème de Hahn-Banach vu en TD, feuille 3, exercice 1). D'après la question 6 et l'exercice 1, $Y^\perp = (F \oplus H)^\perp = F^\perp \cap H^\perp$. De plus, on sait que si $T \in \mathcal{L}(X)$ alors $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$ et $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T)}^\perp$ $(\diamond)$

(cf. TD, exercice 1 de la feuille 2; l'égalité $E^\perp = \overline{E}^\perp$ est évidente, voir également l'exercice 2 de la feuille 6). Par conséquent, $\ker(T)^\perp = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp\perp} \supset \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$. Dans notre cas $X$ est réflexif et, grâce au résultat de la question 4 de l'exercice 1, $\ker(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$ $(\diamond\diamond)$.

**Rmq :** *on montre de la même façon que* $\ker(T^*)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T)}$ *(vrai même si $X$ n'est pas réflexif) en utilisant le résultat de la question 3 de l'exercice 1.*

En prenant $T = A - \mathrm{Id}$ dans $(\diamond)$ et $(\diamond\diamond)$ on obtient $F^* = H^\perp$ et $F^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A^* - \mathrm{Id}_{X'})}$. D'où

$$Y^\perp = F^\perp \cap H^\perp = H^* \cap F^* \quad \text{avec} \quad H^* = \overline{\mathrm{Im}(A^* - \mathrm{Id}_{X'})}\,.$$

Il reste à montrer que $H^* \cap F^* = \{0_{X'}\}$. Cela découle de l'argument de la question 4 transposé à l'espace dual $(X', \|\cdot\|_{X'})$ et à l'application duale $A^*$, au lieu de $(X, \|\cdot\|)$ et $A$ (notons que l'on a bien $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|(A^*)^n\|_{\mathcal{L}(X')} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} = M < \infty$). D'où le résultat.

8. On ne suppose pas ici que $X$ est réflexif. La convergence en norme de $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ implique la convergence faible, donc il est clair que (I) $\Rightarrow$ (II).

   (II) $\Rightarrow$ (III). Soit $x \in X$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. On a $S_N x \in C_x$ (en effet, on vérifie bien que la somme des coefficients $t_n = N^{-1}$, qui multiplient les $A^n x$ dans la somme $S_N x$, est égale à 1). Il est facile de montrer que $\overline{C_x}$ est convexe : si $t \in [0,1]$ et $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans $C_x$ convergeant respectivement vers $y$ et $z$, alors la suite $(ty_p + (1-t)z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est à valeur dans $C_x$ (car $C_x$ est convexe) et converge vers $ty + (1-t)z \in \overline{C_x}$. Or tout ensemble fermé de $(X, \|\cdot\|)$ est faiblement fermé (cf. feuille de TD 4, exercice 2). Donc $\overline{C_x}$ est faiblement fermé. Par l'hypothèse (II), on peut extraire une sous-suite $(S_{\varphi(N)}x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ de $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ convergeant faiblement vers $z$, d'où $z \in \overline{C_x}$. Il reste à montrer que $z \in F$. Soit $f \in X'$. Alors $|f(AS_{\varphi(N)}x - S_{\varphi(N)}x)| \leq \|f\|\|AS_{\varphi(N)} - S_{\varphi(N)}\|\|x\| \to 0$ quand $N \to \infty$ d'après 1(c). Mais

   $$\lim_{N\to\infty} f(AS_{\varphi(N)}x - S_{\varphi(N)}x) = \lim_{N\to\infty} (A^*f - f)(S_{\varphi(N)}x) = (A^*f - f)(z)$$

   car $S_{\varphi(N)}x \to z$ faiblement. Par unicité de la limite, $(A^*f - f)(z) = 0$, c'est-à-dire, $f(Az - z) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $f \in X'$, il s'ensuit que $Az - z = 0$ et donc $z \in F$.

   (III) $\Rightarrow$ (I). Soit $z \in \overline{C_x} \cap F$ et $\varepsilon > 0$. Soit $u$ une combinaison convexe finie des vecteurs $x, Ax, \cdots A^n x, \cdots$ approchant $z$ à $\varepsilon$ près, $\|z - u\| \leq \varepsilon$. Un calcul analogue à celui détaillé dans la question 1(c) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\|S_N A^n - S_N\| = \left\| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{n-1} \left(A^{N+m} - A^m\right) \right\| \leq \frac{2Mn}{N} \to 0$$

   et en particulier $\|S_N A^n x - S_N x\| \to 0$ quand $N \to \infty$. Comme $u$ est une combinaison linéaire finie des $A_n x$, il en découle que $\|S_N u - S_N x\| \to 0$. On a déjà vu que $z \in F \Rightarrow S_N z = z$. D'où

   $$\limsup_{N\to\infty} \|z - S_N x\| \leq \limsup_{N\to\infty} \|S_N z - S_N u\| + \lim_{N\to\infty} \|S_N u - S_N x\| \leq M\|z - u\| \leq M\varepsilon\,.$$

   En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on obtient $\lim\limits_{N\to\infty} \|z - S_N x\| = 0$, c'est-à-dire, $x \in Y$ et $Px = z$.

   Supposons que $X$ est réflexif. D'après un corollaire du théorème de Banach-Alaoglu (cf. cours), toute suite bornée dans $X$ admet une sous-suite faiblement convergente. Or pour tout $x \in X$, la suite $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée (elle est contenue dans la boule de centre 0 et de rayon $M\|x\|$). Donc l'implication (II) $\Rightarrow$ (I) entraîne $Y = X$ et l'on retrouve le résultat de la question 7.