Université Joseph Fourier **Cours MAT403**
Master Mathématiques, Informatique **Année 2005–2006**

Examen du 4 septembre 2007

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice : Soit $X = L^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de carré intégrable, et soit $Y \subset X$ l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) = \{f \in X \mid f' \in X\}$. On rappelle que Y est un espace de Hilbert, muni de la norme $\|f\|_Y = (\|f\|_X^2 + \|f'\|_X^2)^{1/2}$. On note $C_0^1(\mathbb{R}) \subset Y$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 à support compact.

a) Vérifier qu'il existe une fonction $\chi \in C_0^1(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 1 \ , \\ 0 & \text{si } |x| \ge 2 \ . \end{cases}$$

b) Soit $f \in Y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$f_n(x) = f(x)\,\chi(x/n) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Montrer que $f_n \in Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $\|f - f_n\|_Y \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

c) Soit $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$ tel que $\psi(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Soit également $g \in Y$ une fonction à support compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$g_n(x) = n \int_{\mathbb{R}} \psi(n(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Vérifier que $g_n \in C_0^1(\mathbb{R})$, et que

$$g_n'(x) = n \int_{\mathbb{R}} \psi(n(x-y))g'(y)\,\mathrm{d}y \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

d) Montrer que $\|g - g_n\|_Y \to 0$ lorsque $n \to \infty$. *Indication :* On remarquera que

$$g(x) - g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(z)\Big(g(x) - g(x - \frac{z}{n})\Big)\,\mathrm{d}z \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

et on en déduira que $\|g - g_n\|_X^2 \le \int_{\mathbb{R}} \psi(z)\|g - T_{z/n}g\|_X^2\,\mathrm{d}z$, où $(T_z g)(x) = g(x-z)$. On utilisera enfin le fait que, comme $g \in X$, on a $\|g - T_z g\|_X \to 0$ lorsque $z \to 0$.

e) En déduire que l'espace $C_0^1(\mathbb{R})$ est dense dans Y.

Problème :

Première partie : Soit $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites complexes $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable, muni du produit scalaire

$$(c\,|\,d)_X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\overline{d_n}\;, \quad \text{pour } c, d \in X\;.$$

On note $A : X \to X$ l'application linéaire définie par

$$(Ac)_n = 2c_n - c_{n+1} - c_{n-1}\;, \quad \text{pour } c \in X \text{ et } n \in \mathbb{Z}\;.$$

I.a) Vérifier que A est une application linéaire bornée, et estimer sa norme.

I.b) Montrer que A est *symétrique* (c'est-à-dire que $A = A^*$) et *définie positive* (c'est-à-dire que $(Ac\,|\,c)_X \ge 0$ pour tout $c \in X$, avec égalité seulement si $c = 0$). En déduire que le spectre de A vérifie $\sigma(A) \subset [0, \|A\|]$.

I.c) Soit $x \in [0, 2\pi]$, et soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite *bornée* définie par $c_n = e^{inx}$. Vérifier que $Ac = \lambda(x)c$, où $\lambda(x) = 2 - 2\cos(x)$.

I.d) Soit $x \in [0, 2\pi]$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit un élément $c \in X$ par la formule suivante :

$$c_n = \begin{cases} e^{inx} & \text{si } |n| \le N\;, \\ 0 & \text{si } |n| > N\;. \end{cases}$$

Vérifier que $\|c\|_X = \sqrt{2N+1}$ et que $\|(A - \lambda(x))c\|_X = 2$. En déduire que $\lambda(x) \in \sigma(A)$.

I.e) Déduire des questions précédentes que $\sigma(A) = [0, 4]$.

Deuxième partie : Soit à présent $Y = L^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire

$$(f\,|\,g)_Y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\;, \quad \text{pour } f, g \in Y\;.$$

On rappelle que l'application $U : Y \to X$ définie par

$$(Uf)_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x\;, \quad \text{pour } f \in Y \text{ et } n \in \mathbb{Z}\;,$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

II.a) Soit $B \in \mathcal{L}(Y)$ l'application définie par $B = U^{-1}AU$. Montrer que B est l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto \lambda(x)$. En déduire que le spectre de A est purement continu, c'est-à-dire que $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$.

II.b) Soit $f \in Y$ tel que $Uf \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et soit $g \in Y$. Si $h = fg$, vérifier que $h \in Y$ et que

$$(Uh)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (Uf)_m\,(Ug)_{n-m}\;, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}\;.$$

II.c) Soit $a \in]0,1[$, et soit $b = a + a^{-1} - 2 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-inx}}{b + \lambda(x)} \, \mathrm{d}x \; = \; \frac{a^{1+|n|}}{1 - a^2} \; .$$

II.d) En utilisant les questions précédentes, montrer que l'application résolvante $(A+b)^{-1}$ est donnée par la formule suivante :

$$\big((A+b)^{-1} c\big)_n \; = \; \frac{a}{1-a^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a^{|m|} \, c_{n-m} \; , \quad \text{pour } c \in X \text{ et } n \in \mathbb{Z} \; .$$

Que vaut la norme de $(A+b)^{-1}$?