Université Joseph Fourier **Cours MAT403**
Master Mathématiques, Informatique **Année 2005–2006**

Examen du 9 janvier 2007

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha} , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} .$$

En particulier, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ikx} \,\mathrm{d}x , \quad k \in \mathbb{R} .$$

On suppose également que

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{(1+|k|)^\alpha} , \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{R} .$$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - 2\pi n) .$$

Montrer que la série du membre de droite converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ainsi définie est continue et périodique de période 2π. *Indication : on pourra montrer que la convergence est uniforme pour $x \in [-\pi, \pi]$.*

b) On se propose de calculer les coefficients de Fourier de la fonction g. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, vérifier que

$$c_n(g) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-inx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(n) .$$

c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx} . \tag{1}$$

En particulier, en posant $x = 0$, on obtient la *formule sommatoire de Poisson :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) .$$

d) En appliquant cette formule dans le cas où $f(x) = e^{-a|x|}$, établir la relation

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a\,\tanh(\pi a)}\ , \quad a > 0\ .$$

e) On suppose à présent que le support de f est contenu dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Vérifier que

$$f(x) = g(x)\,\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)\ , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\ , \tag{2}$$

où $\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

f) En prenant la transformée de Fourier de l'égalité (2) et en utilisant la relation (1), montrer que

$$\hat{f}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\,\frac{\sin((k-n)\pi)}{(k-n)\pi}\ , \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ .$$

Cette formule montre que, si $\mathrm{supp}(f) \subset [-\pi,\pi]$, la transformée de Fourier de f est univoquement déterminée par ses valeurs sur le réseau $\mathbb{Z}$ (*théorème d'échantillonnage*).

Problème. Soit X un espace de Hilbert (sur $\mathbb{C}$). Si $A \in \mathcal{L}(X)$ est une application linéaire bornée dans X, on note $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in X \,|\, Ax = 0\}$ son noyau et $\mathrm{Im}(A) = \{Ax \,|\, x \in X\}$ son image. On note également $A^* \in \mathcal{L}(X)$ l'application adjointe définie par la relation

$$(A^*x \,|\, y) = (x \,|\, Ay) \quad \text{pour tous les } x, y \in X\ ,$$

où $(\cdot\,|\,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans X. Si $M \subset X$ est un sous-espace vectoriel, on note $\dim(M)$ sa dimension, avec la convention que $\dim(M) = \infty$ si M n'est pas de dimension finie.

Première partie. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\|Ax\| \ge \gamma\|x\|$ pour tout $x \in X$.

I.a) Vérifier que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et que $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace fermé de X.

I.b) En déduire que A est bijectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(A^*) = \{0\}$.

I.c) Soit $B \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \gamma$. Si

$$M = \mathrm{Ker}(A^*)\ , \quad N = \mathrm{Ker}(A^* + B^*)\ ,$$

vérifier que $N \cap M^\perp = \{0\}$. *Indication : si $x = Ay \in N \cap M^\perp$, on pourra utiliser le fait que $((A^*+B^*)x \,|\, y) = 0$.*

I.d) On se propose de montrer que

$$0 \le \dim(N) \le \dim(M) \le \infty\ .$$

Il suffit évidemment de considérer le cas où $\dim(M) = m < \infty$. Soit P le projecteur orthogonal sur M, et soient $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ des vecteurs appartenant à N. Vérifier que les vecteurs $Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_{m+1}$ sont linéairement dépendants, et en déduire qu'il en va de même de $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$. Conclure.

I.e) En échangeant les rôles de A et $A+B$, montrer que, si $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \gamma/2$, alors

$$\dim \mathrm{Ker}(A^*) \;=\; \dim \mathrm{Ker}(A^* + B^*) \;. \tag{3}$$

I.f) Vérifier que l'égalité (3) reste valable si l'on suppose seulement que $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \gamma$. *Indication : on pourra étudier la fonction* $d(t) = \dim \mathrm{Ker}(A^* + tB^*)$ *pour* $t \in [0,1]$.

Deuxième partie. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. On définit

$$\Theta(A) \;=\; \Big\{ (Ax \,|\, x) \in \mathbb{C} \,\Big|\, x \in X \,,\; \|x\| = 1 \Big\} \;,$$

et on note $\Delta(A) = \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(A)}$ l'intérieur du complémentaire de $\Theta(A)$ dans $\mathbb{C}$.

II.a) Vérifier que $\Theta(A)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}$. On admettra sans démonstration que $\Theta(A)$ est convexe (*théorème de Hausdorff*), ce qui implique que $\Delta(A)$ est connexe.

II.b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$, on a

$$\mathrm{dist}(\lambda, \Theta(A)) \;\le\; \|(A - \lambda)x\| \;.$$

En déduire que $\|(A-\lambda)x\| \ge \mathrm{dist}(\lambda, \Theta(A))\|x\|$ pour tout $x \in X$.

II.c) Vérifier que, si $\lambda \in \Delta(A)$, alors λ est soit dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, soit dans le spectre résiduel $\sigma_r(A)$. En outre, $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$.

II.d) En utilisant la première partie du problème, montrer que, si $\lambda_0 \in \Delta(A)$, alors

$$\dim \mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}) \;=\; \dim \mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}_0)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \mathrm{dist}(\lambda_0, \Theta(A))$.

II.e) En utilisant la connexité de $\Delta(A)$, vérifier que $\dim \mathrm{Ker}(A^* - \bar{\lambda}) = 0$ pour tout $\lambda \in \Delta(A)$. En déduire que $\Delta(A) \subset \rho(A)$, de sorte que $\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)}$.

II.f) Si $A \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur symétrique ($A = A^*$), montrer en utilisant la question précédente que le spectre de A est inclus dans un intervalle de l'axe réel, dont on précisera les bornes supérieure et inférieure.