Master 1 "Mathématiques, Informatique", MAT403 Université J. Fourier
2006-2007

Devoir surveillé N^o 2, mercredi 13 décembre 2006

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : *2 heures.*

Exercice 1. Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée maximale de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X.

1. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

   (i) $x_n \to x$ faiblement quand $n \to \infty$;

   (ii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et il existe $M \subset X$ dense dans X tel que pour tout $y \in M$, $(x_n|y) \to (x|y)$ quand $n \to \infty$;

   (iii) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ et pour tout $i \in I$, $(x_n|e_i) \to (x|e_i)$ quand $n \to \infty$.

2. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de X ($e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ où le 1 est en i-ième position). Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $(x_n|e_i) \to (x|e_i)$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$ mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement.

Exercice 2. On considère l'espace de Hilbert $X = L^2([-1,1]^2)$ des (classes d'équivalence de) fonctions de deux variables de carrés sommables sur $[-1,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On rappelle que le produit scalaire sur X est :

$$(h|k) = \int_{[-1,1]^2} h(t,s)\,\overline{k(t,s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \quad \forall\, h,k \in X\ ,$$

où $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $L^2([-1,1])$ est muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad \forall\, f,g \in L^2([-1,1])\ .$$

Soit $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deux familles orthonormées maximales de $L^2([-1,1])$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, soit $\varphi_i \otimes \psi_j$ la (classe d'équivalence de) fonction(s) définie par :

$$(\varphi_i \otimes \psi_j)(t,s) = \varphi_i(t)\,\psi_j(s) \quad , \quad (t,s) \in [-1,1]^2\ .$$

1. Montrer que $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ constitue une famille orthonormée de X.

2. Soit $h \in X$ et $i \in \mathbb{N}$. On pose $h_i(s) = \displaystyle\int_{-1}^{1} h(t,s)\,\overline{\varphi_i(t)}\,\mathrm{d}t\ ,\ s \in [-1,1]\ .$

   Montrer que $h_i \in L^2([-1,1])$ et que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $(h|\varphi_i \otimes \psi_j) = \langle h_i|\psi_j\rangle$.

3. Montrer que $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale de X.

4. Soit $M \subset L^2([-1,1])$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires de $L^2([-1,1])$,

   $$M = \big\{ f \in L^2([-1,1]); f(-t) = f(t) \text{ pour presque tout } t \in [0,1] \big\}\ .$$

   (a) Montrer que M est fermé.

   (b) Déterminer l'orthogonal $M^\perp$ de M et les projecteurs orthogonaux sur M et $M^\perp$.

5. (Question hors barème). Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel suivant de X :

   $$N = \Big\{ h \in X; h(-t,s) = h(t,-s) = h(t,s) \text{ pour presque tout } (t,s) \in [-1,1]^2 \Big\}\ .$$

Exercice 3. On munit l'espace de Hilbert $X = L^2([0, 2\pi])$ du produit scalaire

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \forall\, f, g \in X\ .$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit g une fonction périodique de période 2π, dont la restriction à $[0, 2\pi]$ vérifie $g|_{[0,2\pi]} \in X$. On désigne par $c(g) = (c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de g et par $\|c(g)\|_\infty = \sup_n |c_n(g)|$ sa norme sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Pour tout $f \in X$, soit

$$(Af)(t) = (g * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s \quad , \quad t \in [0, 2\pi]\ .$$

1. Montrer que $A : f \mapsto Af$ est une application linéaire bornée $X \to X$ de norme $\|A\| \le \|c(g)\|_\infty$.
   Indication : on pourra d'abord vérifier que si $f \in X$, les coefficients de Fourier de Af vérifient :
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(Af)|^2 \le \|c(g)\|_\infty^2 \|f\|^2\ .$$
2. L'application A est-elle surjective?
   Donner une condition sur $c(g)$ pour que A soit injective.
3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$ pour p suffisamment grand. On note $\|a\|_{\ell^p} = (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}$ la norme usuelle sur $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \le p < \infty$. Montrer que :
   $$\lim_{k\to\infty} \|a\|_{\ell^k} = \|a\|_\infty\ .$$
4. Le *rayon spectral* de A est défini par la limite
   $$\mathrm{Rsp}(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}\ .$$
   Montrer que $\mathrm{Rsp}(A) = \|c(g)\|_\infty$.