Master 1 "Mathématiques, Informatique", MAT403 — Université J. Fourier, 2006-2007

Devoir surveillé N^o 1, lundi 6 novembre 2006 à 15h15.

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : *2 heures.*

Exercice 1. On considère l'espace $X = c_c(\mathbb{N})$ des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$ qui s'annulent à partir d'un certain rang (c'est-à-dire, $\exists\ N_a \in \mathbb{N}, n \geq N_a \Rightarrow a_n = 0$). Pour tout $a \in X$, on pose :

$$\|a\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| .$$

1. Montrer brièvement que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (on pourra utiliser des résultats du cours sans les redémontrer).
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $a \in X$, on pose $f_m(a) = m\, a_m$. Montrer que f_m définit une forme linéaire bornée sur X. Montrer que
$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |f_m(a)| < \infty \quad \forall\ a \in X \quad \text{et} \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \|f_m\|_{X'} = \infty .$$
3. Expliquer pourquoi le résultat de la question 2 n'est pas en contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus.

Exercice 2. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. On note $(X', \|\cdot\|_{X'})$ le dual topologique de $(X, \|\cdot\|_X)$, $(X'', \|\cdot\|_{X''})$ le dual topologique de $(X', \|\cdot\|_{X'})$, ect... Le but de cet exercice est de montrer que X est réflexif $\Leftrightarrow$ X' est réflexif.

1. Soit I une isométrie linéaire bijective de $(X, \|\cdot\|_X)$ dans un espace de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$.
   (a) Montrer que l'application linéaire duale I^* de I est une isométrie bijective.
   (b) Montrer que X est réflexif si et seulement si Y est réflexif.
2. Soit J et J' les injections canoniques $X \hookrightarrow X''$ et $X' \hookrightarrow X'''$:
$$\begin{array}{llll} J & : & x \in X \mapsto \varphi_x \in X'' & , \quad \varphi_x(f) = f(x) \quad \forall\ f \in X' \\ J' & : & f \in X' \mapsto \psi_f \in X''' & , \quad \psi_f(\varphi) = \varphi(f) \quad \forall\ \varphi \in X'' . \end{array}$$
   (a) On suppose que $J(X) \neq X''$. Montrer que $J(X)$ n'est pas dense dans $(X'', \|\cdot\|_{X''})$. En déduire qu'il existe $\psi \in X'''$, $\psi \neq 0$, tel que $\psi(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in J(X)$.
   (b) Montrer que la forme linéaire ψ de la question précédente n'appartient pas à $J'(X')$.
   (c) En déduire que X' réflexif $\Rightarrow$ X réflexif.
3. En utilisant les questions 1 et 2, montrer que X réflexif $\Rightarrow$ X' réflexif.

Exercice 3. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ l'espace de Banach des suites a dans $\mathbb{K}$ telles que $\|a\|_1 = \sum_n |a_n| < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut identifier $(X, \|\cdot\|)$ avec un espace de Banach quotient $(\ell^1(\mathbb{N})/M, \|[\cdot]\|_1)$, où M est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^1(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire, il existe une isométrie linéaire bijective $\mathcal{I}$ entre ces deux espaces).

Soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans la boule unité $\overline{B}_1 = \{x \in X; \|x\| \leq 1\} \subset X$. On considère l'application :

$$I : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N}) & \to X \\ a & \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_n . \end{cases}$$

1. Montrer que I est une application linéaire bornée et que $\|I\| \leq 1$.

2. Soit $x \in X$, $\|x\| = 1$. Montrer qu'il existe une application $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} x_{p(i)} \right\| \leq 2^{-k-1} .$$

3. Montrer que I est surjective.

4. Soit l'application linéaire :

$$\mathcal{I} : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N})/\ker(I) & \to X \\ [a] & \mapsto I(a) , \end{cases}$$

   où $[a]$ désigne la classe d'équivalence de a modulo $M = \ker(I)$ (avec $a \sim c$ ssi $\exists\, b \in M$, $a = b+c$) et $\ell^1(\mathbb{N})/M$ est l'espace vectoriel quotient muni de la norme $\|[a]\|_1 = \inf_{b\in M} \|a - b\|_1$.
   Montrer que $\mathcal{I}$ est bien définie, bornée, de norme $\|\mathcal{I}\| \leq 1$, et que $\mathcal{I}$ est bijective.

5. Soit $x \in X$, $\|x\| = 1$, et $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$. En généralisant le résultat de la question 2, montrer qu'il existe une application $p_l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} l^{-i}\, x_{p_l(i)} .$$

   En déduire que si $x = I(a)$ avec $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ et $\|x\| = 1$, alors $\|[a]\|_1 \leq l/(l-1)$.

6. Montrer que $\mathcal{I}$ est une isométrie.