Université Joseph Fourier | **Cours MAT403**
Master Mathématiques, Informatique | **Année 2005–2006**

Examen du 5 septembre 2006

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice. On note $X = C_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|f\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| , \quad f \in X .$$

Soit z un nombre complexe de partie réelle strictement positive. Etant donné $f \in X$, on définit une fonction $A_z f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$(A_z f)(x) = \frac{1}{2z} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z|x-y|} f(y)\,\mathrm{d}y , \quad x \in \mathbb{R} .$$

1) Montrer que $A_z f \in X$ quel que soit $f \in X$.

2) Vérifier que la correspondance $f \mapsto A_z f$ définit une application linéaire bornée de X dans X, et estimer la norme de cette application.

3) Soit $f \in X$ et $g = A_z f$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle

$$-g''(x) + z^2 g(x) = f(x) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

En déduire que l'application $A_z : X \to X$ est injective, mais non surjective. Pouvez-vous caractériser son image ?

4) Etant donné $k \in \mathbb{R}$, on note $f_k \in X$ la fonction définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$. Vérifier que f_k est une fonction propre de l'application A_z, et calculer la valeur propre qui lui est associée. En déduire que l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{C}$ défini par

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{k^2 + z^2} \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\} \cup \{0\}$$

est inclus dans le spectre de A_z. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

5) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Vérifier qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(w) > 0$, tel que $z^2 - \lambda^{-1} = w^2$. En déduire que $\lambda\mathbf{1} - A_z$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ (l'algèbre des applications linéaires bornées de X dans X), et établir la formule

$$(\lambda\mathbf{1} - A_z)^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\lambda} + \frac{A_w}{\lambda^2} .$$

Indication : Etant donné $h \in X$, on cherche $f \in X$ tel que $(\lambda\mathbf{1} - A_z)f = h$. On pourra poser $g = A_z f$ et écrire une équation différentielle pour g faisant intervenir le second membre h.

6) En conclure que $\sigma(A_z) = \Gamma$. Quel est le rayon spectral de l'application A_z ?

Problème. Pour tout $p \in [1,\infty]$, on note $\ell^p \equiv \ell^p(\mathbb{N})$ l'espace des suites de nombres complexes $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ telles que $\|a\|_p < \infty$, où

$$\|a\|_p \;=\; \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\Bigr)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty\ , \qquad \text{et} \qquad \|a\|_\infty \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\ .$$

Le but de ce problème est de caractériser les suites qui convergent faiblement dans l'espace de Banach ℓ^1. Si $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ^1, on notera que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'élément $a(n) = (a_0(n), a_1(n), a_2(n), \ldots) \in \ell^1$ est lui-même une suite de nombres complexes.

Partie I.

I.a) Soit $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge faiblement vers zéro lorsque $n \to \infty$. Vérifier que cette suite est bornée dans ℓ^1, et que

$$a_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}\ . \tag{1}$$

I.b) Donner un exemple de suite bornée dans ℓ^1 qui possède la propriété (1) et qui ne converge pas vers zéro faiblement lorsque $n \to \infty$.

Partie II.

Soit $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge faiblement vers zéro lorsque $n \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ par

$$f_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n)\, \mathrm{e}^{ikx}\ , \qquad x \in [0, 2\pi]\ .$$

II.a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est continue. Vérifier qu'il existe $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \le M$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

II.b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans l'espace $L^2([0, 2\pi])$.

II.c) En utilisant la question précédente, montrer que $\|a(n)\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$, et en déduire que $\|a(n)\|_p \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $p > 1$.

Partie III.

Soit $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge faiblement vers zéro lorsque $n \to \infty$. On se propose de montrer que cette suite converge fortement vers zéro, c'est-à-dire que $\|a(n)\|_1 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On raisonne par l'absurde, en supposant au contraire que $\limsup_{n\to\infty} \|a(n)\|_1 > 0$.

III.a) Expliquer pourquoi on peut supposer, sans perte de généralité, que $\|a(n)\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on fera cette hypothèse dans la suite du problème).

III.b) On pose $k_0 = n_0 = 0$. Montrer qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 > k_0$, tel que

$$\sum_{k=k_0}^{k_1-1} |a_k(n_0)| \;\ge\; \frac{3}{4}\ .$$

III.c) Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tel que

$$\sum_{k=0}^{k_1-1} |a_k(n_1)| \; \leq \; \frac{1}{8} \; .$$

En déduire qu'il existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, tel que

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} |a_k(n_1)| \; \geq \; \frac{3}{4} \; .$$

III.d) En procédant par récurrence, montrer qu'il existe deux suites d'entiers $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ strictement croissantes telles que

$$\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} |a_k(n_j)| \; \geq \; \frac{3}{4} \; , \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N} \; .$$

III.e) Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\phi(z) \; = \; \begin{cases} \bar{z}/|z| & \text{si } z \neq 0 \; , \\ 0 & \text{si } z = 0 \; . \end{cases}$$

On définit une suite $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots) \in \ell^\infty$ en demandant que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$b_k \; = \; \phi(a_k(n_j)) \quad \text{si} \quad k_j \leq k < k_{j+1} \; .$$

Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k(n_j) \Big| \; \geq \; \frac{1}{2} \; .$$

En conclure que la suite $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro faiblement lorsque $n \to \infty$.