Université Joseph Fourier **Cours MAT403**
Master Mathématiques, Informatique **Année 2005–2006**

Examen du 11 janvier 2006

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les notes du cours et des travaux dirigés sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice. Soit $X = C^0([0,1],\mathbb{C})$ l'espace de Banach des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|f\|_X = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \ .$$

Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et $M = \max\{|K(x,y)|\,;\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\}$. Pour tout $f \in X$, on note $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$(Af)(x) \;=\; \int_0^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\ , \quad 0 \le x \le 1\ .$$

a) Montrer que $Af \in X$ quel que soit $f \in X$.

b) Montrer que l'application linéaire $A : X \to X$ définie ci-dessus est bornée, et que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$.

c) Montrer que, pour tout $f \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|(A^n f)(x)| \;\le\; \frac{(Mx)^n}{n!}\,\|f\|_X\ , \quad \forall\, x \in [0,1]\ .$$

(*On pourra procéder par récurrence sur n.*) En déduire que $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le M^n/(n!)$, et en conclure que le rayon spectral de A est nul. Que peut-on dire du spectre de A ?

d) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, vérifier que la série de Neumann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \;=\; \frac{\mathbf{1}}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^2}{\lambda^3} + \dots \qquad (*)$$

converge absolument dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(X)$, et que sa somme est égale à $(\lambda - A)^{-1}$.

e) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un cercle de rayon non nul, orienté dans le sens positif, et tel que $0 \notin \Gamma$. Calculer dans $\mathcal{L}(X)$ la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\ .$$

Indication : On remarquera que la série $(*)$ converge uniformément pour tout $\lambda \in \Gamma$. On pourra distinguer deux cas, suivant que le contour d'intégration Γ entoure l'origine ou non.

Problème. Soit X l'espace de Hilbert $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$(f\,|\,g)_X \;=\; \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\;,$$

et soit Y l'espace de Banach $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni de la norme

$$\|f\|_Y \;=\; \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|\;.$$

On rappelle que $Y \subset X$ et que Y est dense dans X.

Première partie : Soit $h \in Y$. On considère l'application $\Phi_h : X \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_h(f) \;=\; \int_0^{2\pi} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x\;,\quad f\in X\;.$$

I.1) Vérifier que Φ_h est une forme linéaire bornée sur X.

I.2) Vérifier que Φ_h est une forme linéaire bornée sur Y, et que $\|\Phi_h\|_{Y'} \le \|h\|_{L^1}$ où $\|h\|_{L^1} = \int_0^{2\pi}|h(x)|\,\mathrm{d}x$.

I.3) Montrer qu'il existe $g \in X$ tel que $|g(x)| \le 1$ pour tout $x \in [0,2\pi]$ et $\Phi_h(g) = \|h\|_{L^1}$.

I.4) Montrer qu'il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y telle que $\|g_n\|_Y \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|g - g_n\|_X \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

I.5) En déduire que $\|\Phi_h\|_{Y'} = \|h\|_{L^1}$.

Deuxième partie : Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère le noyau de Dirichlet $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$D_N(x) \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{inx}\;,\quad x\in\mathbb{R}\;.$$

On rappelle que

$$D_N(x) \;=\; \frac{\sin((N+\frac12)x)}{\sin(\frac12 x)} \qquad \text{si}\quad x\notin\{2k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\}\;.$$

On note également

$$I_N \;=\; \int_0^{\pi} |D_N(x)|\,\mathrm{d}x\;,\quad J_N \;=\; 2\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac12)x)|}{x}\,\mathrm{d}x\;.$$

II.1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{0<x\le\pi}\left|\frac{1}{\sin(\frac12 x)} - \frac{2}{x}\right| \;\le\; C\;.$$

II.2) En déduire que $|I_N - J_N| \le C\pi$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

II.3) Vérifier que, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{M\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x \ \geq \ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} \ .$$

II.4) En déduire que $J_N \to \infty$ et $I_N \to \infty$ lorsque $N \to \infty$.

Troisième partie : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on considère la forme linéaire $\psi_N : Y \to \mathbb{C}$ définie par

$$\psi_N(f) \ = \ \int_0^{2\pi} D_N(x) f(x) \, \mathrm{d}x \ , \quad f \in Y \ .$$

On remarquera que $\psi_N(f) = 2\pi(S_N f)(0)$, où $S_N f$ est la somme partielle symétrique de la série de Fourier de f.

III.1) En utilisant les deux premières parties du problème, vérifier que $\psi_N \in Y'$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et que $\|\psi_N\|_{Y'} \to \infty$ lorsque $N \to \infty$.

III.2) A l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, en déduire qu'il existe $f \in Y$ tel que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |\psi_N(f)| \ = \ \infty \ .$$

Montrer en outre que f peut être choisi de façon que $f(0) = f(2\pi)$.

III.3) Soit $x_0 \in]0, 2\pi[$. Montrer qu'il existe $f \in Y$ tel que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |(S_N f)(x_0)| \ = \ \infty \ .$$

En outre, quel que soit $\varepsilon > 0$, montrer que f peut être choisi de façon que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ tel que $|x - x_0| \geq \varepsilon$.

III.4) Si $E \subset [0, 2\pi]$ est un ensemble fini, montrer qu'il existe $f \in Y$ tel que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |(S_N f)(x)| \ = \ \infty \quad \text{pour tout } x \in E \ .$$