Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 — Université J. Fourier, 2005-2006

Devoir surveillé N^o 2, mercredi 14 décembre 2005

Documents autorisés (à l'exclusion de toute autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : *2 heures.*

Exercice 1. On rappelle qu'une fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ est *affine par morceaux* s'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_k = \pi$ tels que $f(x) = \lambda_i(x - x_i) + f_i \ \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}[, \ \forall\, i = 0, 1, \cdots, k-1$, où λ_i et f_i sont des constantes indépendantes de x.

1. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* affine par morceaux vérifiant $f(-\pi) = f(\pi)$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourier c_n de f en fonction des constantes x_i et λ_i.
   (b) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers f.
   Indication : on pourra d'abord montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(nx)$ peut s'exprimer comme une fonction polynôme de $\cos(x)$ de degré inférieur ou égal à n.
   (d) On suppose de plus que f est paire. Déduire de ce qui précède que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynôme P telle que $|f(x) - P(\cos(x))| < \varepsilon \ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$ (c'est-à-dire, f peut être approchée uniformément sur $[-\pi, \pi]$ par un polynôme trigonométrique $P \circ \cos$).
2. Soit $h : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varepsilon > 0$. On pose $g(x) = h(\cos(x)) \ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$.
   (a) Montrer qu'il existe $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continue, paire et affine par morceaux telle que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$.
   (b) En conclure grâce à la question 1 qu'il existe une fonction polynôme P sur $[-1, 1]$ telle que $|h(t) - P(t)| < 2\varepsilon \ \forall\, t \in [-1, 1]$. Ainsi, toute fonction $h \in C([-1, 1])$ peut être approchée uniformément sur $[-1, 1]$ par une fonction polynôme. Ce résultat est dû à Weierstrass.
   (c) Peut-on démontrer le résultat de Weierstrass directement sans faire appel à la question 1, en développant g en série de Fourier ?

Exercice 2. Soit $(X, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire et $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}^\star}$ une famille orthonormée maximale de X.

1. Montrer que
$$N(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \big|(x \mid e_i)\big|$$
définit une norme sur X vérifiant $N(x) \leq \|x\| \ \forall\, x \in X$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X convergeant faiblement vers $x \in X$. Montrer que $N(x_n - x) \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *bornée* dans X telle que $N(x_n - x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.
4. Trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $N(x_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ mais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0.
5. Montrer que l'espace vectoriel normé $(X, N(\cdot))$ n'est pas complet.
6. Montrer que la boule $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ est compacte dans $(X, N(\cdot))$.