Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 2, examen
le 24 juin 2016, de 9h à 12h

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée; à l'intérieur d'un même exercice on peut admettre les résultats des questions précédentes.

I (Autour du cours)

Soient G un groupe fini et $n \geq 1$ un entier.

1. Définir l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions centrales sur G. Donner sa dimension et expliquer en quoi la table des caractères de G fournit la matrice de passage entre deux bases de $\mathcal{C}$, que l'on précisera.

2. Soient V et W deux représentations de G. Donner la définition d'un G–morphisme de V dans W. Peut–on exprimer $\dim \operatorname{Hom}_G(V, W)$ en terme des caractères de V et W? Si R désigne la représentation régulière de G, donner la valeur de $\dim \operatorname{Hom}_G(R, R)$.

3. Vrai ou Faux? Le nombre de classes d'isomorphie de représentations de dimension n du groupe G est fini.

4. Donner la définition d'un entier algébrique. Le nombre $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ peut-il être une valeur d'un caractère de G?

5. On suppose $n \geq 2$. Définir la transformée de Fourier discrète des polynômes de degré $< n$ de $\mathbb{C}[X]$. En expliquer l'intérêt pour calculer le produit de deux polynômes de degré $< n/2$.

II

On note G un groupe fini.

1. a) Si le groupe dual $\widehat{G}$ possède un élément d'ordre 2, montrer que G possède un sous–groupe distingué d'indice 2.

b) Si H est un sous–groupe distingué d'indice 2 de G, construire un morphisme surjectif de l'abélianisé de G dans G/H. En déduire qu'alors le groupe dual $\widehat{G}$ possède un élément d'ordre 2.

c) Déterminer l'abélianisé du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

d) Le groupe $\mathfrak{A}_4$ possède-t-il un sous–groupe d'indice 2?

T.S.V.P.

2. Soit (V, ρ) une représentation de G de caractère χ et de dimension d. On suppose que x est un élément d'ordre 2 de G.

a) Montrer que $\chi(x) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\chi(x) \equiv d \bmod 2$.

On suppose dans la suite de la question que $\chi(x) \equiv d + 2 \bmod 4$. On note $\delta : G \to \mathbb{C}^\times$ le morphisme $\det \circ \rho$.

c) Calculer $\delta(x)$.

d) Donner la structure du groupe $\operatorname{Im} \delta$ et montrer qu'il contient un sous–groupe d'indice 2.

e) En déduire que G possède un sous–groupe distingué d'indice 2.

III

On note α une racine du polynôme $X^2 - X - 1$. On considère un groupe G dont la table des caractères est partiellement donnée comme suit:

	1	$\lvert C_2 \rvert = 15$	$\lvert C_3 \rvert = 20$	$\lvert C_4 \rvert = 12$	$\lvert C_5 \rvert = 12$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2		-1	0	α	
χ_3			0		
χ_4		0	1		
χ_5	5			0	0

1. Donner l'ordre de G, puis compléter la table (on pourra commencer par remplir la première colonne; on pourra utiliser entre autres les propriétés des vecteurs colonnes de la table).

2. Montrer que le groupe G est simple.

3. Chaque élément de G est–il conjugué à son inverse?

4. a) Donner le nombre de 5–sous–groupes de Sylow de G.

On note V la représentation par permutation associée à l'action de G par conjugaison sur l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses 5–Sylow.

b) Quel est le nombre d'orbites pour cette action? Montrer que $\dim V^G = 1$.

c) À l'aide de la première colonne de la table, en déduire la décomposition du caractère χ_V de V en somme d'irréductibles.

◇ ◇ ◇