Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 2, examen

le 19 mai 2016, de 9h à 12h

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies. On peut traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes, excepté dans III B) les résultats de III, 3. et 4.

Dans tout le sujet, on rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$ du groupe fini G est munie du produit scalaire hermitien

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f_1(x)} f_2(x) \,.$$

I

Soit G un groupe abélien fini. On considère f non nulle dans l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. On note $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$ sa transformée de Fourier, et $\mathrm{Supp}\,(f)$ son support, c.a.d. l'ensemble des $x \in G$ tels que $f(x) \neq 0$. On définit de même $\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})$. On souhaite montrer que

$$|\mathrm{Supp}\,(f)| \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})| \geqslant |G| \quad (*)$$

On note

$$M = \sup\{|f(x)|;\, x \in G\}, \quad ||f||^2 = \langle f, f \rangle \,.$$

1. Établir les inégalités $||f||^2 \leqslant \frac{M^2}{|G|} |\mathrm{Supp}\,(f)|$ et $M \leqslant \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|$.

2. En déduire grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $M^2 \leqslant \frac{|\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|}{|G|} ||\widehat{f}||^2$ (*on pourra considérer la fonction indicatrice de* $\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})$).

3. Déduire de 2. que $M^2 \leqslant ||f||^2 \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|$.

4. Conclure que $||f||^2 \leqslant \frac{||f||^2}{|G|} |\mathrm{Supp}\,(f)| \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|$, ce qui établit $(*)$.

T.S.V.P.

II

Soit G un groupe dont la table de caractères est la suivante:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
V_1	1	1	1	1	1	1
V_2	1	-1	1	-1	i	$-i$
V_3	1	1	1	1	-1	-1
V_4	1	-1	1	-1	$-i$	i
V_5	2	-2	-1	1	0	0
V_6	2	2	-1	-1	0	0

1. Déterminer le cardinal de G.

2. Décrire le sous–groupe dérivé et le centre de G en terme de classes de conjugaison C_j, et donner le cardinal de ces sous–groupes.

3. Déterminer l'ordre et la structure de l'abélianisé de G.

4. Donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à la représentation $\mathrm{Hom}(V_5, V_5)$.

III

Soient G un groupe fini et H un sous–groupe de G "ne rencontrant pas ses conjugués", c'est-à-dire tel que :

$$H \cap gHg^{-1} = \{1\}$$

pour tout $g \in G \setminus H$. On note N la réunion de $\{1\}$ et du complémentaire dans G de $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$. On souhaite montrer que N est un *sous–groupe distingué* de G, et que G est le produit semi–direct de N et H. Dans la partie A) on admettra pour 3. et 4. le fait suivant, dont la preuve fera indépendamment l'objet de la partie B): *tout caractère de H se prolonge de manière unique en un caractère de G constant sur N.*

A

1. Montrer que si $H \neq 1$ le nombre de sous–groupes gHg^{-1} distincts ($g \in G$) est $[G : H]$. Déterminer le cardinal de N.

2. Montrer que tout groupe fini admet une représentation fidèle.

Dans la suite de cette partie on note χ le caractère d'une certaine représentation fidèle de H, et $\widetilde{\chi}$ le caractère de G constant sur N qui prolonge χ (l'existence de $\widetilde{\chi}$ sera établie en B).

3. a) Montrer que l'ensemble des $x \in G$ tels que $\widetilde{\chi}(x) = \widetilde{\chi}(1)$ est égal à N.

b) Qu'en déduit–on pour la partie N de G ?

4. Montrer avec 1. que $NH = G$.

B

On s'interdit ici d'utiliser les résultats des questions 3. et 4.

5. a) Justifier que N est stable par conjugaison par tout élément de G.

b) Soient $h, h' \in H$ et $g, g' \in G$ tels que $ghg^{-1} = g'h'g'^{-1} \neq 1$. Montrer que $g^{-1}g' \in H$.

c) Soit f une fonction centrale sur H. Démontrer avec a) et b) qu'il *existe* une unique fonction centrale $\widetilde{f}$ sur G qui satisfait aux deux propriétés:
(i) $\widetilde{f}$ prolonge f (i.e. $\widetilde{f}(h) = f(h)$ si $h \in H$),
(ii) $\widetilde{f}(x) = f(1)$ si $x \in N$ (i.e. $\widetilde{f}$ est constante sur N).

6. Soient f et $\widetilde{f}$ comme en 5., et soit α une fonction centrale sur G. On souhaite montrer que

$$\langle \alpha, \widetilde{f} \rangle_G = \langle \alpha_H, f \rangle_H + f(1)\langle \alpha, 1 \rangle_G - f(1)\langle \alpha_H, 1 \rangle_H \quad (**).$$

a) Montrer que les termes de $(**)$ dépendent linéairement de f. Établir $(**)$ pour $f = 1$.

b) On suppose que $f(1) = 0$. On note $\mathcal{R}$ un système de représentants des classes à gauche modulo H: les différents conjugués de H sont donc les rHr^{-1} pour r décrivant $\mathcal{R}$, et tout conjugué d'un élément de $H \setminus \{1\}$ s'écrit de manière unique rhr^{-1}, avec $(r, h) \in \mathcal{R} \times H$. Établir $(**)$ dans ce cas.

c) Conclure que $(**)$ est vérifiée pour toute f fonction centrale sur H.

7. (notations f et $\widetilde{f}$ comme en 5.). En déduire que $\langle 1, \widetilde{f} \rangle_G = \langle 1, f \rangle_H$, puis que l'application $t\colon f \mapsto \widetilde{f}$ de $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[H]$ dans $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[G]$ est une isométrie, c'est-à-dire que pour toute f dans $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[H]$ on a

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{f} \rangle_G = \langle f, f \rangle_H \,.$$

8. Soit χ un caractère de H; on note $\widetilde{\chi} = t(\chi)$.

a) Pour tout caractère α de G, montrer avec $(**)$ que $\langle \alpha, \widetilde{\chi} \rangle_G \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\widetilde{\chi}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{s} c_i \chi_i$, avec $c_i \in \mathbb{Z}$, où $\chi_1, \ldots, \chi_s$ sont les caractères irréductibles de G.

c) Montrer avec b) et 7. que si χ est irréductible, $\widetilde{\chi}$ est un caractère irréductible de G.

d) Conclure que l'image par t de tout caractère de H est un caractère de G.

$\diamond \diamond \diamond$