Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, examen

le 19 mai 2014, de 9h à 12h

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée; à l'intérieur d'un même exercice on peut admettre les résultats des questions précédentes.

I (Autour du cours)

1. Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in G$ on note δ_g l'élément de $\mathbb{C}[G]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $G \setminus \{g\}$.

a) Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[G]$.

b) En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{G}}$ est injectif.

2. Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

a) Décrire l'algèbre $\mathrm{End}_G(V)$ des G–endomorphismes de V.

b) Déterminer toutes les sous–représentations de V.

3. Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.

II

On donne ci-dessous la table des caractères du groupe diédral D_6.

	id	r	r^2	r^3	s	rs
U	1	1	1	1	1	1
V	1	1	1	1	-1	-1
W	1	-1	1	-1	1	-1
X	1	-1	1	-1	-1	1
Y	2	1	-1	-2	0	0
Z	2	-1	-1	2	0	0

1. Donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à la représentation $\mathrm{Hom}(Y, Y)$.

2. On rappelle que D_6 est le groupe des isométries de l'hexagone régulier $\mathcal{H}$ de centre 0 et dont un sommet est le point $(1, 0)$. On considère l'action

T.S.V.P.

de D_6 sur l'ensemble des six arêtes de $\mathcal{H}$. On note (A, ρ) la représentation par permutation associée. Calculer le caractère χ_A et donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à A.

3. Quel est le noyau de la représentation Z?

4. À l'aide de la table, déterminer tous les sous–groupes distingués de D_6.

III

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C};\ z^p = 1\}$.

1. Montrer que les représentations irréductibles de G ont dimension 1 ou p. Que peut-on dire du nombre des représentations de G dans $\mathbb{C}$?

2. Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G est $p-1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de G.

Soit $g \in G \setminus D(G)$.

3. Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de G telle que $\chi_V(g) = \zeta$.

4. Déduire de ce qui précède et de la question I 3. que si V est une représentation irréductible de dimension p de G, alors $\chi_V(g) = 0$.

5. Montrer que si V est une représentation de G de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g), \chi_V(g^2), \dots, \chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\sum_\lambda C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \mapsto gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).

6. Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de G n'est pas cyclique. À quel groupe est-il isomorphe?

7. Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(G)$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de G alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$, pour g' parcourant $D(G)$.

8. Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G.

9. *(hors barême)* Donner explicitement la table des caractères de G lorsque $p = 3$.

$\diamond \diamond \diamond$