Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, corrigé
de l'examen du 19 mai 2014

I (Autour du cours) (6,5 points)

1. *Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in G$ on note δ_g l'élément de $\mathbb{C}[G]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $G \setminus \{g\}$.*

a) *Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[G]$.*

Pour toute f dans $\mathbb{C}[G]$, on a $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi^{-1}$. Et $\widehat{\delta_g}(\chi) = \sum_{g'} \delta_g(g')\chi(g')$ $= \chi(g)$. Ainsi $\delta_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g)\chi^{-1}$.

b) *En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{G}}$ est injectif.*

Soit $g \in G$. Par a), la transformée de Fourier de δ_g est l'application $\chi \mapsto \chi(g)$ d'évaluation en g des éléments de $\widehat{G}$. Elle s'identifie donc à l'image naturelle de g dans son bidual. Un élément g est dans le noyau de ce morphisme naturel d'évaluation si et seulement si tous les caractères $\chi \in \widehat{G}$ y valent 1, c'est-à-dire si et seulement si g a même transformée de Fourier que 1. Par la formule d'inversion ceci équivaut à $g = 1$.

2. *Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.*

a) *Décrire l'algèbre $\mathrm{End}_G(V)$ des G–endomorphismes de V.*

Si $V = \oplus_{i=1}^r V_i$, alors chaque élément de $\mathrm{End}_G(V)$ se "décompose" en une somme directe de G–morphismes de V_i dans V_j, pour (i,j) variant dans $\{1,\ldots,r\}^2$. Par le lemme de Schur, les G-morphismes entre irréductibles non isomorphes sont nuls, et $\mathrm{End}_G(V_i) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$. On en déduit que l'algèbre $\mathrm{End}_G(V)$ s'identifie au produit des algèbres $\mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$ (blocs diagonaux d'une homothétie sur chaque V_i).

b) *Déterminer toutes les sous–représentations de V.*

On utilise l'unicité de la *décomposition canonique* de V: par l'hypothèse, toutes les composantes isotypiques de V sont irréductibles, et les sous–représentations sont toutes les sommes (directes) de certaines de ces composantes. (*Attention*, si une représentation irréductible apparaissait dans V avec multiplicité > 1, la composante isotypique correspondante, et par suite V, possèderait une *infinité* de sous–représentations irréductibles, toutes isomorphes!)

3. *Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.*

D'après le cours, le produit des caractères de deux représentations V et (W,ρ) est le caractère de la représentation $\mathrm{Hom}(V^*, W)$, où V^* est la représentation duale de V. *Ou encore:* si $\dim V = 1$, ce produit est le caractère de la représention $\chi_V \cdot \rho$ de G sur W ($g \cdot w =: \chi_V(g) \cdot \rho(g)(w) \in W$). Le degré de ce caractère produit est sa valeur en 1, donc clairement le degré de χ_W.

L'irréductibilité du produit (valable si $\dim V = 1!$) s'obtient facilement en calculant le carré hermitien de $\chi_V \chi_W$, égal à celui de χ_W (car χ_V, morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$, a pour valeurs des racines de l'unité donc de module 1), donc ce carré hermitien vaut 1 par l'irréductibilité de χ_W. On peut aussi remarquer qu'une sous–représentation de $(W, \chi_V \cdot \rho)$, c.-à-d. un s.e.v. stable pour l'action correspondante de G, est une sous–représentation de (W, ρ), donc $\{0\}$ ou W.

II (6,5 points)

On donne ci-dessous la table des caractères du groupe diédral D_6.

	id	r	r^2	r^3	s	rs
U	1	1	1	1	1	1
V	1	1	1	1	-1	-1
W	1	-1	1	-1	1	-1
X	1	-1	1	-1	-1	1
Y	2	1	-1	-2	0	0
Z	2	-1	-1	2	0	0

1. *Donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à la représentation* $\mathrm{Hom}(Y, Y)$.

Le caractère de $\mathrm{Hom}(Y, Y)$ est $\overline{\chi_Y}\chi_Y$. La table fournit le cardinal des classes de conjugaison (quotient de $|D_6|$ par le carré hermitien de la colonne). Ces cardinaux sont donc de gauche à droite: $1, 2, 2, 1, 3, 3$. Le nombre de fois qu'une représentation irréductible S donnée apparaît dans $\mathrm{Hom}(Y, Y)$ est alors $\langle |\chi_Y|^2, \chi_S\rangle$. Pour $S = U$, on trouve $\frac{1}{12}(4 + (1 \times 2) + (2 \times 1) + 4) = 1$, idem pour $S = V$; pour $S = Z$ on trouve $\frac{1}{12}((4 \times 2) - (2 \times 1) - (2 \times 1) + (4 \times 2)) = 1$. Puisque $\dim U + \dim V + \dim Z = 4 = \dim \mathrm{Hom}(Y, Y)$, les autres calculs sont superflus et la somme directe $U \oplus V \oplus Z$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(Y, Y)$ car elle a même caractère.

2. *On rappelle que D_6 est le groupe des isométries de l'hexagone régulier $\mathcal{H}$ de centre* 0 *et dont un sommet est le point* $(1, 0)$. *On considère l'action de D_6 sur l'ensemble des six arêtes de $\mathcal{H}$. On note (A, ρ) la représentation par permutation associée. Calculer le caractère χ_A et donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à A.*

On sait que $\chi_A(g)$ est le nombre des arêtes fixes sous g. Il est immédiat que ce nombre vaut 0 si $g \neq \mathrm{id}$ est une rotation. Une remarque utile est que l'élément rs est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\pi/6$ avec Ox, donc la symétrie par rapport à une droite joignant les milieux de deux arêtes opposées. Par suite rs (comme ses conjugués r^3s et r^5s) fixe précisément ces 2 arêtes. Par contre s et et ses conjugués r^2s et r^4s sont des symétries d'axe joignant 2 sommets opposés, ils ne fixent aucune arête. Le caractère χ_A a donc pour valeurs (de gauche à droite): $6, 0, 0, 0, 0, 2$. On procède alors comme en 1) pour décomposer A en somme d'irréductibles. On obtient que A est isomorphe à la représentation $U \oplus X \oplus Y \oplus Z$.

3. *Quel est le noyau de la représentation Z?*

Par le cours, c'est l'ensemble des $g \in D_6$ tel que $\chi_Z(g) = \chi_Z(\mathrm{id}) = 2$. C'est donc la réunion des classes de conjugaison de id et de r^3, c.-à-d. $\ker \rho_Z = \{\mathrm{id}, r^3\}$.

4. *À l'aide de la table, déterminer tous les sous–groupes distingués de* D_6.

On sait que ce sont exactement toutes les intersections de noyaux de représentations irréductibles. On obtient comme en 3): $\ker \rho_U = D_6$, $\ker \rho_V =< r >$ (contient r et inclus dans $< r >$), $\ker \rho_W$ est la réunion des classes de conjugaison de id, r^2 et s, c.-à-d. $\ker \rho_W = \{\mathrm{id}, r^2, r^4, s, r^2 s, r^4 s\}$, $\ker \rho_X$ est la réunion des classes de conjugaison de id, r^2 et rs, c.-à-d. $\ker \rho_X = \{\mathrm{id}, r^2, r^4, rs, r^3 s, r^5 s\}$, $\ker \rho_Y = \{\mathrm{id}\}$, enfin $\ker \rho_Z = \{\mathrm{id}, r^3\}$.

Reste à ajouter les intersections de ces sous–groupes entre eux: on obtient un nouveau sous–groupe distingué $\ker \rho_W \cap \ker \rho_X =< r^2 >= \{\mathrm{id}, r^2, r^4\} = D(G)$. Au total D_6 admet 7 sous–groupes distingués; les sous–groupes distingués propres sont tous les sous–groupes de $< r >$ et deux autres d'indice 2.

III (10,5+ points)

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C};\ z^p = 1\}$.

1. *Montrer que les représentations irréductibles de G ont dimension 1 ou p. Que peut-on dire du nombre des représentations de G dans $\mathbb{C}$?*

Par théorème, la dimension des représentations irréductibles de G divise l'ordre de G, donc p^3; par la formule "de Burnside", la somme des carrés de ces dimensions vaut l'ordre, p^3. Donc les seules valeurs possibles sont 1 et p. On sait que 1 est la dimension de la représentation triviale, irréductible. Et que G possède une représentation irréductible de dimension > 1, car il est non abélien (cours). Donc $\{1, p\}$ est l'ensemble des dimensions des représentations irréductibles de G.

On sait qu'une représentation de G dans $\mathbb{C}$ est donnée précisément par un morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$ (*i.e.* un élément du dual $\widehat{G}$), et que leur nombre est l'ordre de l'abélianisé G_{ab}. En particulier ce nombre divise $|G| = p^3$.

2. *Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G est $p - 1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de G.*

On écrit la formule "de Burnside" pour G: si r est le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G, on obtient: $p^3 = |G_{ab}| + rp^2$. Par suite p^2 divise G_{ab}, qui divise lui-même p^3. Or G n'est pas abélien, donc l'ordre de G_{ab} n'est pas p^3, et c'est p^2. Il suit de la formule que $r = p - 1$.

Soit $g \in G \setminus D(G)$.

3. *Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de G telle que $\chi_V(g) = \zeta$.*

Toute représentation (V, χ) de dimension 1 de G factorise par G_{ab}, d'ordre p^2. Puisque $g \notin D(G)$, on sait qu'il existe χ un caractère de degré 1 tel que $\chi(g) \neq 1$. On a $\chi(g)^{p^2} = 1$; si $\chi(g)$ est d'ordre p dans $\mathbb{C}^\times$, alors il engendre $\mathbb{U}_p$, donc tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ s'écrit $\zeta = \chi(g)^k = \chi^k(g)$, et la représentation $(\mathbb{C}, \chi^k)$

convient pour V. Sinon, $\chi^p(g)$ est d'ordre p, on remplace χ par le caractère χ^p dans l'argument.

4. *Déduire de ce qui précède et de la question I 3. que si V est une représentation irréductible de dimension p de G, alors $\chi_V(g) = 0$.*

Supposons $\chi_V(g) \neq 0$. Alors en multipliant χ_V par les p caractères de degré 1 obtenus en 3), on obtient par I 3. p caractères irréductibles de degré p distincts, car leur valeur en g diffère. Or par 2) G n'admet que $p-1$ caractères irréductibles de degré p, contradiction.

5. *Montrer que si V est une représentation de G de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g), \chi_V(g^2), \ldots, \chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\sum_\lambda C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \mapsto gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).*

Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de $\rho_V(g)$ (diagonalisable), alors celles de $\rho_V(g^k)$ sont $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$. De plus $\rho_V(g)$ est inversible, donc de déterminant d_g non nul. La somme proposée par l'énoncé $\sum_\lambda C(\lambda)$, qui est nulle par définition, s'écrit donc aussi $\sum_{k=1}^n a_k \chi_V(g^k) + na_0$, où on note $C(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ($a_n = 1, a_0 = \pm d_g$). Le fait que na_0 soit non nul entraîne ainsi que l'un des $\chi_V(g^k)$, $1 \leq k \leq n$, l'est également.

6. *Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de G n'est pas cyclique. À quel groupe est-il isomorphe?*

Si l'abélianisé de G était cyclique, il serait engendré par la classe, d'ordre p^2, d'un certain élément g de $G \setminus D(G)$. On applique alors 5) à g et V une représentation irréductible de G de dimension p: avec 4) on en déduit que l'un des g^i, $1 \leq i \leq p$ est dans $D(G)$. Mais alors l'ordre de la classe de g dans l'abélianisé serait majorée par $i \leq p$, contradiction. Par suite G_{ab} est un groupe abélien d'ordre p^2, non cyclique. Par le théorème de structure des groupes abéliens finis, on a $G_{ab} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7. *Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(G)$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de G alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$, pour g' parcourant $D(G)$.*

Si $\dim V = 1$, $\chi_V(g') = 1$ pour tout $g' \in D(G)$ car χ_V est un morphisme dans $\mathbb{C}^\times$ abélien. Sinon, $\dim V = p$ et on écrit que le carré hermitien de χ_V vaut 1: d'après 4), on trouve $\sum_{g' \in D(G)} |\chi_V(g')|^2 = p^3$. Or pour tout g' on sait que $|\chi_V(g')| \leq p = \dim V$. Puisque $|D(G)| = p$, ceci entraîne l'égalité $|\chi_V(g')| = p$ pour tout g'.

Le cours montre que l'égalité $|\chi_V(g')| = \dim V$ a lieu ssi $\rho_V(g')$ est une homothétie. Or si $g' \neq 1$, g' est d'ordre p, donc l'ordre de $\rho_V(g')$ est 1 ou p. Si c'était 1, g' et donc $D(G)$ seraient dans le noyau de ρ_V; ainsi ρ_V factoriserait en un morphisme de G_{ab} abélien dans $\mathrm{GL}(V)$, ce qui contredit le fait que V est irréductible de dimension > 1. Donc $\rho_V(g')$ est une homothétie d'ordre p, de rapport une racine primitive $p^{i\grave{e}me}$ ζ de 1. Alors on a $D(G) = \{g'^l \,|\, 0 \leq l \leq p-1\}$, et chaque $\rho(g'^l)$ est l'homothétie de V de rapport ζ^l.

8. *Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G.*

D'après 7), les p éléments de $D(G)$ ont pour carré hermitien de leur colonne associée dans la table de caractères de G la valeur $|G| = p^3$ obtenue (Burnside) pour la colonne de 1, donc leur centralisateur est G, *i.e.* ils sont dans le centre de G.

Soit $g \in G \setminus D(G)$. Par 4), g n'est pas dans le centre car il n'agit pas comme une homothétie sur V irréductible de dimension p (en effet, on sait que $\rho_V(g)$ est alors un G–morphisme, donc par Schur une homothétie). Or le centralisateur de g contient g et $D(G)$, donc ce sous-groupe a cardinal $> p$, et distinct de p^3, soit exactement p^2 par Lagrange. Le cardinal de la classe de conjugaison de g est donc $p^3/p^2 = p$ (toute la classe a même image dans l'abélianisé, par cardinalité elle coïncide donc avec la classe à droite $gD(G)$).

On obtient en particulier que le centre de G est égal à $D(G)$.

9. *(hors barême) Donner explicitement la table des caractères de G lorsque* $p = 3$.

On note x un générateur de $D(G)$ (d'ordre 3), et g_{ij} un élément de $G \setminus D(G)$ qui s'envoie sur $(\bar{i}, \bar{j})$ dans le quotient G_{ab}, identifié au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a $Z(G) = D(G)$, et la classe de conjugaison de g_{ij} dans G est $g_{ij} < x >$ (cf. 8)). Ainsi la partie haute de la table privée des colonnes de x et x^2 est la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (groupe abélien, donc isomorphe à son groupe dual). Les deux représentations de degré 3, duales l'une de l'autre, correspondent sur $Z(G) = D(G)$ à une action fidèle par homothéties, et on a $\rho(x^2) = \rho(x)^2$. Leurs caractères sont conjugués.

	1	x	x^2	g_{10}	g_{20}	g_{01}	g_{02}	g_{11}	g_{22}	g_{12}	g_{21}
χ_{00}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{10}	1	1	1	j	j^2	1	1	j	j^2	j	j^2
χ_{20}	1	1	1	j^2	j	1	1	j^2	j	j^2	j
χ_{01}	1	1	1	1	1	j	j^2	j	j^2	j^2	j
χ_{02}	1	1	1	1	1	j^2	j	j^2	j	j	j^2
χ_{11}	1	1	1	j	j^2	j	j^2	j^2	j	1	1
χ_{22}	1	1	1	j^2	j	j^2	j	j	j^2	1	1
χ_{12}	1	1	1	j	j^2	j^2	j	1	1	j^2	j
χ_{21}	1	1	1	j^2	j	j	j^2	1	1	j	j^2
χ'	3	$3j$	$3j^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ''	3	$3j^2$	$3j$	0	0	0	0	0	0	0	0

◇ ◇ ◇