Institut Fourier
M1 Algèbre 2

Devoir à la maison n°2
à rendre le 29 mars 2011

I

Soient G un groupe fini, $h \in G$, et χ_1, χ_2 des caractères irréductibles distincts de G. Montrer les formules d'orthogonalité généralisées: pour i, j dans $\{1, 2\}$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(gh)\chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)} .$$

(On pourra composer les projecteurs convenables associés à la décomposition canonique de la représentation régulière.)

II

1. Ecrire la table des caractères du groupe diédral D_4, identifié au groupe des isométries d'un carré du plan réel.

2. Soit W la représentation par permutation de D_4 associée à son action sur les sommets du carré. Décomposer W en somme de représentations irréductibles, à isomorphisme près.

3. On numérote de 1 à 4 les sommets du carré, de sorte que D_4 s'identifie à un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_4$. Décomposer la restriction à H de chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$ en somme de représentations irréductibles de H, à isomorphisme près.

4. Pouvez–vous justifier *à priori* le fait que chaque représentation irréductible de H apparaît au moins une fois dans la décomposition d'une de ces restrictions?

- $\diamondsuit$ -