Institut Fourier
M1 Algèbre 2

Devoir à la maison n°1
à rendre le 24 février 2011

I

Soit G un groupe abélien fini.

1. Montrer que $\{\chi(g) \mid g \in G,\ \chi \in \widehat{G}\}$ est un sous–groupe de $\mathbb{C}^\times$ qu'on déterminera.

2. a) A quelle condition sur $|G|$, G admet–il un caractère réel non trivial?

b) Montrer que le nombre de ces caractères coïncide avec le nombre d'éléments d'ordre 2 de G.

3. On prend $G = \mathbb{F}_p^\times$ où p est premier impair.

a) Soit $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p^\times\}$. Déterminer $|C|$.

b) Soit f le morphisme $x \mapsto x^{p-1/2}$ de G dans G. Déterminer son image et son noyau (utiliser a)).

c) On définit $\chi : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ par $\chi(x) = 1$ si $x \in C$ et $\chi(x) = -1$ sinon. Montrer que χ est un caractère de $\mathbb{F}_p^\times$. Que vaut $\chi(\overline{-1})$?

d) Montrer que χ est l'unique élément d'ordre 2 de $\widehat{\mathbb{F}_p^\times}$.

II

Soit (V, ρ) une représentation irréductible du groupe fini G. Expliciter un isomorphisme d'algèbres entre $\mathrm{End}_G(V \oplus V)$ et $M_2(\mathbb{C})$.

- $\diamondsuit$ -